

2. LANDASAN TEORI

2.1. Buckling dan Shell

Dinding yang datar disebut plate / plat, sementara semua permukaan dinding plat yang permukaannya berbentuk kurva disebut *shell*.

Buckling adalah suatu fenomena dimana terjadi kehilangan bentuk aslinya karena pembebanan yang diberikan melewati batas beban kritisnya. *Buckling* dapat dilihat pada bagian luar, yaitu mengalami kerutan, bengkok, atau lekukan.

Beban *buckling* adalah beban terkecil yang diasumsikan untuk mencapai kesetimbangan netral atau kesetimbangan equilibrium. *Buckling* terjadi karena adanya penambahan tegangan dari luar serta adanya pergeseran yang terjadi secara spontan.

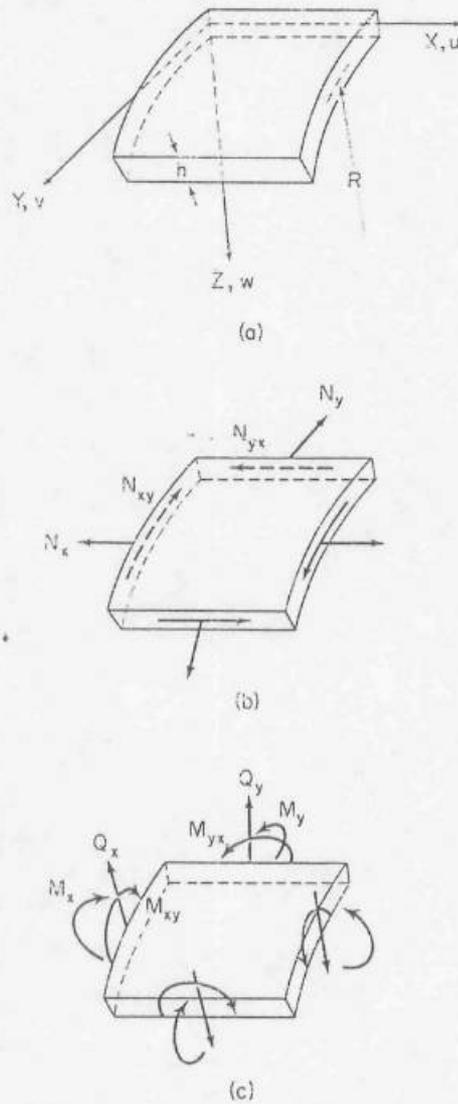
2.2. Teori Linier Shell (Donnell)

Persamaan ini merupakan cara mudah dalam menggambarkan teori *shell* tipis, yaitu dalam hubungannya dengan plat tipis. Perbedaan dasar antara *shell* dan plat adalah dalam pembentuknya mempunyai kelengkungan atau kurvatur dalam kondisi awal, yaitu keadaan tanpa beban atau tegangan awal.

Asumsi-asumsi dalam mendapatkan persamaan-persamaan Donnell:

1. Ketebalan dari *shell* kecil atau tipis dibandingkan dimensi-dimensi lain dari *shell*.
2. Defleksi lateral kecil dibandingkan ketebalan dari *shell*.
3. Material dari konstruksi *shell* adalah sejenis atau *homogenous, isotropik* dan memenuhi hukum Hooke.
4. Garis-garis tegak lurus terhadap permukaan tengah sebelum terjadinya *bending* tetap lurus dan tegak lurus selama proses *bending*.
5. *Shell* merupakan atau berbentuk silinder sempurna pada awal dan dibebani pada tiap potongan melintangnya secara konsentrik.

Sebuah elemen differensial *shell* dengan tebal h dan radius kurvatur R , seperti pada gambar 2.1



Gambar 2.1. Potongan Elemen Silinder *Shell*

Jumlah gaya-gaya pada arah sumbu x :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

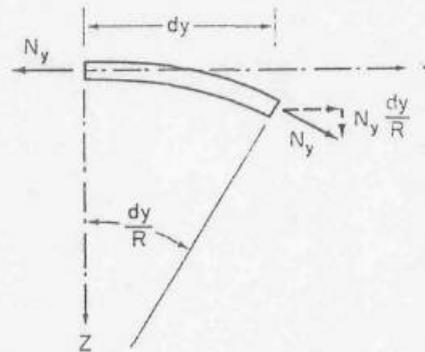
Sedangkan jumlah gaya-gaya pada arah sumbu y :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Untuk mendapatkan persamaan kesetimbangan dalam arah sumbu z, kelengkungan dari elemen harus diperhitungkan, yaitu: kelengkungan awal dan kelengkungan akibat *bending*.

Gaya normal N_y memiliki komponen dalam arah sumbu z :

$$N_y \left(\frac{1}{R} \right) dx dy \quad (2.3)$$



Gambar 2.2. Komponen N_y dalam arah sumbu z

Resultan gaya-gaya di permukaan tengah pada arah sumbu z:

$$\left[N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \right) \right] dx dy \quad (2.4)$$

Komponen gaya geser pada sumbu x dan sumbu y diabaikan, sehingga komponen gaya geser pada arah sumbu z adalah :

$$\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.5)$$

Jumlah persamaan persamaan (2.5) dan persamaan (2.4) sehingga menjadi persamaan kesetimbangan pada arah sumbu z, yaitu:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \right) + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.6)$$

Dimana:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$

Sehingga persamaan (2.6) menjadi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} \\ + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2.1. Hubungan kelengkungan dan momen

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.10)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.11)$$

$$M_{xy} = D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.12)$$

Dimana: $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}$

2.2.2. Hubungan gaya permukaan tengah dan deformasi

Perpanjangan permukaan tengah:

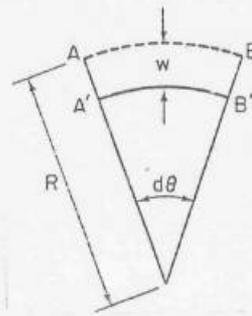
Sumbu x:

$$\epsilon_{.xo} = \frac{\partial u_o}{\partial x} \quad (2.13)$$

Dalam arah sumbu y, pada plat tidak terdapat kurva awal, maka persamaan regangan pada arah sumbu y:

$$\epsilon = - \frac{AB - A'B'}{AB} = - \frac{Rd\theta - (R-w)d\theta}{Rd\theta}$$

$$\epsilon = - \frac{w}{R}, \text{ lihat gambar 2.3.}$$



Gambar 2.3. Regangan ke arah Sumbu y

Tanda (-) menunjukkan perpindahan $w(+)$ merupakan tegangan negatif.

Maka regangan total pada arah sumbu y:

$$\epsilon_{y_0} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{w}{R} \quad (2.14)$$

Kurva awal dari *shell* berpengaruh pada regangan geser pada permukaan tengah, karena itu γ_{xy_0} didapatkan besarnya sama seperti regangan pada plat, yaitu sebesar:

$$\gamma_{xy_0} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (2.15)$$

Hubungan tegangan-regangan untuk plat tipis dapat digunakan untuk *shell* tipis, maka gaya-gaya permukaan tengah *shell*:

$$N_x = \sigma_{x_0} h = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_{x_0} + \mu \epsilon_{y_0}) \quad (2.16)$$

$$N_y = \sigma_{y_0} h = \frac{Eh}{1-\mu^2} (\epsilon_{y_0} + \mu \epsilon_{x_0}) \quad (2.17)$$

$$N_{xy} = \tau_{xy_0} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \gamma_{xy_0} \quad (2.18)$$

Substitusi persamaan (2.13), (2.14), (2.15) ke persamaan (2.16), (2.17) dan (2.18), sehingga didapatkan:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_0}{\partial y} - \mu \frac{w}{R} \right) \quad (2.19)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad (2.20)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) \quad (2.21)$$

Gaya-gaya pada permukaan tengah *shell* terdiri dari:

1. Gaya-gaya utama (*primary force*) yang disebabkan oleh karena gaya yang diberikan sebagai penyebab terjadinya *buckling*, yaitu : P_x, P_y, S_{xy}
2. Gaya-gaya kedua (*secondary force*) yang timbul sebagai akibat karena adanya *buckling*, yaitu N_x, N_y dan N_{xy} . Gaya-gaya kedua ini dapat diabaikan karena besarnya lebih kecil daripada gaya-gaya utama.

Gaya-gaya utama permukaan tengah diasumsikan:

$$N_x = P_x$$

$$N_y = P_y$$

$$N_{xy} = S_{xy}$$

Sehingga gaya-gaya permukaan tengah:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial u_o}{\partial x} + \mu \frac{\partial v_o}{\partial y} - \mu \frac{w}{R} \right) + P_x \quad (2.22)$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) + P_y \quad (2.23)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh(1-\mu)}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \right) + S_{xy} \quad (2.24)$$

2.2.3. Persamaan-persamaan Diferensial

Persamaan kesetimbangan sebagai fungsi perpindahan didapat dengan substitusi persamaan (2.10) sampai (2.12) dan persamaan (2.22) sampai (2.24) ke persamaan (2.1), (2.2) dan (2.9).

$$\frac{\partial^2 u_o}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u_o}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v_o}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 v_o}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v_o}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u_o}{\partial x \partial y} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}
 & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + (N'_x + P_x) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & + (N'_y + P_y) \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(N'_{xy} + S_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dimana: N'_x , N'_y , dan N'_{xy} adalah gaya-gaya kedua (*secondary forces*) permukaan tengah.

Perbandingan bentuk kurva sebagai akibat dari *bending* dengan gaya-gaya kedua permukaan tengah sangat kecil, sehingga mungkin untuk mengabaikan beberapa bagian dari persamaan (2.27)

Sehingga persamaan (2.27) menjadi:

$$\begin{aligned}
 & -D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{P_y}{R} \\
 & + \frac{1}{R} \frac{Eh}{1 - \mu^2} \left(\frac{\partial v_o}{\partial y} - \frac{w}{R} + \mu \frac{\partial u_o}{\partial x} \right) + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Untuk tipe-tipe tertentu, akan memudahkan penyelesaian dengan satu persamaan daripada dengan tiga persamaan. Maka Donnell mengubah persamaan (2.28) menjadi persamaan tunggal dalam w .

Pengoperasian persamaan $\partial^2/\partial x \partial y$ pada persamaan (2.26), $\partial^2/\partial x^2$ dan $\partial^2/\partial y^2$ pada persamaan (2.26).

Didapatkan persamaan:

$$\nabla^4 u = \frac{\mu}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} \tag{2.29}$$

Dimana: ∇^4 merupakan penggunaan operator Laplace secara berturutan dalam 2 dimensi (2-D).

Dengan cara yang sama, penggunaan $\partial^2/\partial x \partial y$ pada persamaan (2.25) dan $\partial^2/\partial x^2$ dan $\partial^2/\partial y^2$ pada persamaan (2.26) memberikan:

$$\nabla^4 v = \frac{\mu + 2}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \tag{2.30}$$

Operator ∇^4 digunakan pada persamaan (2.28) sehingga menjadi:

$$\begin{aligned}
& -D\nabla^8 w + \nabla^4 \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\
& + \frac{1}{R} \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\nabla^4 \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \nabla^4 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \nabla^4 w \right) = 0 \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Jika persamaan (2.29) dioperasikan dengan $\partial/\partial x$ dan persamaan (2.30) dengan $\partial/\partial y$, kemudian hasilnya disubstitusikan ke persamaan (2.31), didapatkan:

$$D\nabla^8 w - \nabla^4 \left(P_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + P_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) dikenal sebagai persamaan Donnell.

Dengan menganggap $P_y = S_{xy} = 0$, maka besar beban kritis dari silinder *shell* yang dikenai beban aksial dapat ditentukan. Dengan cara yang sama pula, S_{xy} (gaya geser) dan P_y (gaya *hoop*) sebagai akibat adanya torsi atau tekanan dari luar dapat ditentukan besarnya.

2.2.4. Beban Aksial Kritis Silinder Shell

Sebuah silinder *shell* dengan panjang (l) dan radius kurva (R). Untuk mendapatkan besarnya beban kritis silinder atau beban *buckling* dari *shell* digunakan persamaan Donnell.

Gaya yang diberikan pada silinder *shell* hanya gaya aksial saja, sehingga persamaan (2.32) menjadi:

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \sigma_x h \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (2.33)$$

Kondisi batas:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \text{ pada } x = 0, l$$

Penyelesaian umum :

$$w = w_o \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{\pi R} \quad (2.34)$$

Dengan: $m = 1, 2, 3, \dots$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Dimana: m = banyak setengah gelombang dalam arah *longitudinal*.

n = banyak setengah gelombang dalam arah *circumferential*.

Untuk menyederhanakan perhitungan:

$$\beta = \frac{nl}{\pi.R} \quad (2.35)$$

Sehingga persamaan (2.34) dapat ditulis:

$$w = w_o \sin \frac{m\pi.x}{l} \sin \frac{\beta\pi.y}{l} \quad (2.36)$$

Substitusi persamaan (2.36) ke persamaan (2.33):

$$D\left(\frac{\pi}{l}\right)^8 (m^2 + \beta^2)^4 + \frac{Eh}{R^2} m^4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 - \sigma_x h \left(\frac{\pi}{l}\right)^6 m^2 (m^2 + \beta^2)^2 = 0 \quad (2.37)$$

Lalu bagi persamaan (2.37) dengan $D(\pi/l)^8$, dan dengan adanya dua parameter baru:

1. Faktor Bentuk (Z):

$$Z = \frac{l^2}{Rh} (1 - \mu^2)^{1/2} \quad (2.38)$$

2. Koefisien tegang *buckling* (k_c):

$$k_c = \frac{\sigma_x h l^2}{D\pi^2} \quad (2.39)$$

Maka persamaan (2.37) menjadi:

$$(m^2 + \beta^2)^4 + \frac{12m^4 Z^2}{\pi^4} - k_c m^2 (m^2 + \beta^2)^2 = 0 \quad (2.40)$$

Penyelesaian persamaan (2.40) untuk k_c :

$$k_c = \frac{(m^2 + \beta^2)^2}{m^2} + \frac{12Z^2 m^2}{\pi^4 (m^2 + \beta^2)^2} \quad (2.41)$$

Nilai terkecil dari k_c didapat saat:

$$\frac{(m^2 + \beta^2)^2}{m^2} = \left(\frac{12Z^2}{\pi^4}\right)^{1/2} \quad (2.42)$$

Substitusikan ke persamaan (2.41), sehingga:

$$k_c = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} Z \quad (2.43)$$

Masukkan persamaan (2.43) ke persamaan (2.39), sehingga diperoleh persamaan untuk mencari besar tegang kritis (σ_{CR}) untuk silinder *shell* dengan panjang menengah (*intermediate length*)

$$\sigma_{CR} = \frac{1}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{Eh}{R},$$

atau, jika $\mu = 0.3$, maka:

$$\sigma_{CR} = 0.6 \frac{Eh}{R} \quad (2.44)$$

Karena besar dari k_c tidak valid terhadap semua harga Z , maka tegangan kritis yang diberikan dari persamaan (2.44) tidak dapat digunakan untuk semua silinder.

Dari persamaan (2.42),

$$\beta = \left[\frac{(12Z^2)^{1/4}}{\pi} m - m^2 \right]^{1/2}$$

Harga dari β menunjukkan bahwa Z dapat lebih kecil dari 2.85, jika $m < 1$ atau β merupakan bilangan imajiner.

Karena kedua kondisi itu dapat diterima, maka diputuskan bahwa harga k_c dan σ_{CR} dapat digunakan untuk silinder *shell* dengan $Z > 2.85$, yaitu silinder *shell* yang panjangnya menengah. Lihat gambar 2.4.

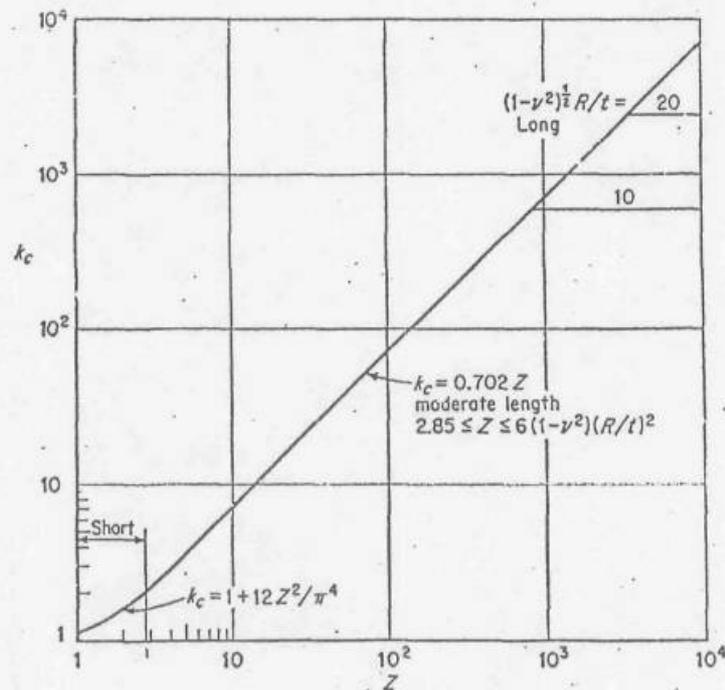
Sedangkan untuk $Z < 2.85$, silinder *shell* pendek, koefisien tegangan kritisnya dapat ditentukan besarnya dengan membuat nilai $m = 1$ dan $\beta = 0$.

Sehingga:

$$k_c = 1 + \frac{12Z^2}{\pi^4} \quad (2.45)$$

dan

$$\sigma_{CR} = \frac{k_c D \pi^2}{h l^2} \quad (2.46)$$



Gambar 2.4. Koefisien *Buckling* (k_c) dan Penentuan Cara Penentuan Beban *Buckling* Berdasarkan Faktor Bentuk (Z)

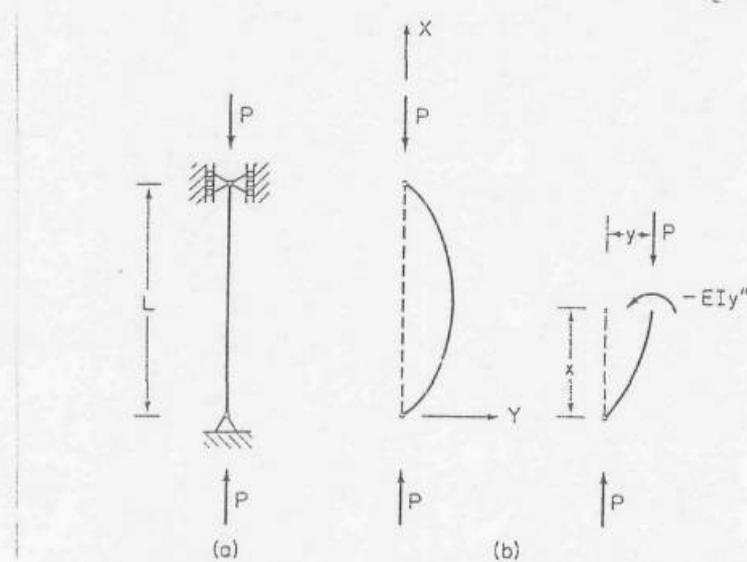
2.3. Teori Linier Kolom (Euler)

2.3.1. Beban Kritis Kolom Euler

Beban Euler adalah beban terkecil dimana kondisi kesetimbangan netral tercapai. Untuk mendapatkan persamaan beban kritis Euler diperlukan asumsi-asumsi sebagai berikut:

1. Luasan penampang harus konstan dan dibuat dari material yang sejenis.
2. Ujung-ujung dari kolom di *simply supports*, yaitu pada pada ujung bawah dihubungkan dengan engsel yang tidak dapat bergerak, sedangkan bagian atasnya di *support* sehingga dapat bebas berotasi dan bergerak vertikal saja.
3. Kolom atau member benar-benar lurus dan beban diberikan sepanjang sumbunya secara *centroidal*.
4. Material bahan dari kolom memenuhi hukum Hooke.

5. Deformasi dari kolom cukup kecil.

Gambar 2.5. Kolom Euler Kondisi *Simply Supported*

Beban kritis adalah beban untuk menghasilkan kesetimbangan sedikit kelengkungan seperti pada gambar 2.5.(b).

Momen tahanan internal pada tiap bagian, sejauh x adalah:

$$M_x = -EI \cdot y''$$

$$\sum M = 0$$

$$EI \cdot y'' - P \cdot y = 0 \quad (2.47)$$

Persamaan (2.47) merupakan persamaan differensial linier dengan koefisien konstan. Penyelesaian persamaan (2.47) didapatkan dengan adanya notasi baru:

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.48)$$

Sehingga persamaan (2.47) menjadi :

$$y'' - k^2 y = 0 \quad (2.49)$$

Penyelesaian dari persamaan differensial homogen/sejenis dengan koefisien konstan, persamaan (2.49) dengan menggunakan formula:

$$y = e^{mx} \quad (2.50)$$

Substitusi persamaan (2.56) ke persamaan (2.47) dengan besar nilai $m = \pm ik$, menghasilkan penyelesaian umum:

$$y = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx} \quad (2.51)$$

$$e^{\pm ikx} = \cos kx \pm i \sin kx \quad (2.52)$$

Dengan menggunakan hubungan persamaan (2.52) pada persamaan (2.51), maka penyelesaian umum (2.51) menjadi:

$$y = A \sin kx + B \cos kx \quad (2.53)$$

Untuk mendapatkan nilai A dan B pada persamaan (2.53), digunakan batasan kondisi:

$$y = 0, \text{ pada } x = 0$$

$$y = 0, \text{ pada } x = l$$

Dari batasan kondisi yang pertama:

$$y = 0, \text{ pada } x = 0$$

didapat nilai:

$$B = 0$$

Sehingga :

$$y = A \sin kx \quad (2.54)$$

Dari batasan kondisi yang kedua:

$$y = 0, \text{ pada } x = l$$

didapat nilai:

$$A \sin kl = 0 \quad (2.55)$$

Hubungan di atas, persamaan (2.55) dapat dipenuhi dalam 2 jalan, yaitu:

$$A = 0, \text{ atau } \sin kl = 0$$

- Jika $A = 0$, k dan P akan ada nilainya (solusi *trivial*), karena solusi ini menegaskan apa yang sudah diketahui, yaitu bahwa kolom berada dalam keadaan setimbang karena adanya beban aksial P sepanjang kolom itu tetap lurus sempurna.

- Jika : $\sin kl = 0$, maka:

$$kl = n\pi, \text{ dimana: } n = 1, 2, 3 \dots \text{ dst.} \quad (2.56)$$

Substitusi persamaan (2.56) ke persamaan (2.47) didapatkan:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2} \quad (2.57)$$

Substitusi persamaan (2.56) ke persamaan (2.54) didapatkan:

$$y = A \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (2.58)$$

Dengan membuat nilai $n = 1$, maka besar P (beban Euler) adalah:

$$P_{eu} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.59)$$

2.3.2 Beban Kritis Kolom Euler Jepit

Pada titik-titik atau ujung-ujung kolom terdapat gaya ke samping dan rotasi. Saat kolom didefleksikan ringan maka timbul momen *bending* (M_0) di kedua ujung-ujungnya, seperti pada gambar 2.6.

Persamaan momen:

$$M_0 = EIy'' + Py$$

$$k^2 = \frac{P}{EI} \quad (2.60)$$

$$y'' + k^2 y = \frac{M_0}{EI} \quad (2.61)$$

Solusi untuk persamaan (2.61) terdiri dari bagian pelengkap dan bagian khusus:

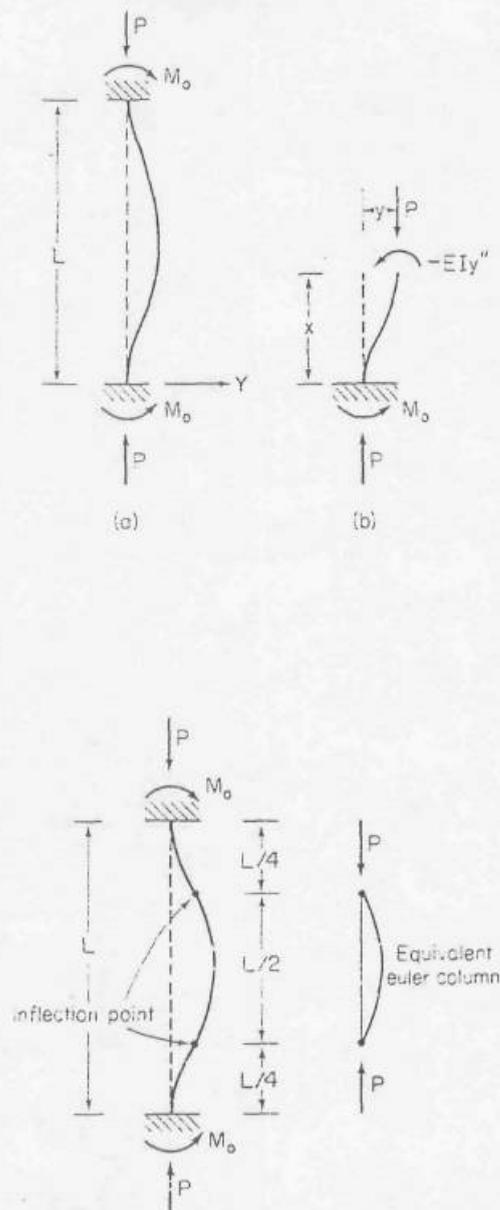
- Pembentuknya (*the former*) adalah solusi persamaan *homogen*

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$
- Pemecahan khusus adalah solusi untuk semua persamaan, seperti:

$$y = -\frac{M_0}{EI k^2}$$

Maka solusi keseluruhannya:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_0}{EI k^2}$$



Gambar 2.6. Kolom Euler dengan Kondisi Jepit

Dan dari persamaan (2.61) didapatkan:

$$y = A \sin kx + B \cos kx + \frac{M_o}{P}$$

A dan B adalah konstanta yang berubah-ubah, maka untuk menentukan besar A dan B digunakan batasan-batasan kondisi:

$$\begin{aligned} y' = 0, & \quad y = 0 \quad \text{pada } x = 0 \\ & \quad y = 0 \quad \text{pada } x = l \end{aligned}$$

Dua batasan kondisi di atas dianggap memenuhi jika:

$$A = 0 \quad \text{dan} \quad B = -\frac{M_o}{P}$$

Sehingga:

$$y = \frac{M_o}{P}(1 - \cos kx)$$

Kondisi berikut merupakan persamaan yang sulit dimengerti:

$$\cos kl = 1,0 \quad (2.62)$$

Maka penyelesaian terkecil bukan nol, untuk persamaan (2.62) adalah:

$$\begin{aligned} kl &= 2\pi \\ k &= \frac{2\pi}{l} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Dari persamaan (2.60):

$$P = k^2 EI$$

Persamaan (2.63) disubstitusikan ke persamaan (2.60) sehingga menjadi:

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} \quad (2.64)$$