

4. METODE *MESHLESS*

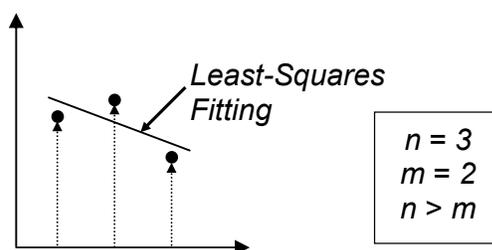
Metode *meshless* merupakan suatu alternatif dari metode elemen hingga yang digunakan untuk keperluan analisis struktur tanpa mendefinisikan elemen sebagai cara diskretisasi, namun dengan pendefinisian titik-titik nodal dan kondisi batas dari suatu domain untuk menjadi permodelan struktur sesungguhnya. Harapan utama dari pengembangan metode *meshless* adalah untuk menghilangkan (atau setidaknya mengurangi) kesulitan prosedur *meshing* dan *remeshing* pada struktur elemen yang kompleks, yang masih menjadi suatu kelemahan dari metode elemen hingga. Pada metode *meshless*, prosedur diskretisasi maupun rediskretisasi dalam suatu domain dapat dilakukan cukup dengan menambahkan atau menghilangkan titik nodal pada lokasi yang diinginkan tanpa adanya kesulitan untuk melakukan prosedur *remeshing*. Secara umum, metode *meshless* yang harus dapat mempertahankan karakter analisis numerik secara lokal, menggunakan aproksimasi lokal untuk merepresentasikan *trial function* dengan nilai-nilai dari variabel yang belum diketahui di beberapa lokasi acak titik-titik nodal.

Dalam perkembangannya, terdapat berbagai variasi metode *meshless*, yang pada dasarnya tetap memiliki prinsip diskretisasi tanpa elemen yang serupa, serta tetap berprioritas pada perbaikan akurasi dan konvergensi. Beberapa metode yang telah diperkenalkan, di antaranya adalah metode *Smooth Particle Hydrodynamics* (Gingold dan Monaghan, 1977), metode *Diffuse Element* (Nayroles *et al.*, 1992), metode *Element-Free Galerkin* (Belytschko *et al.*, 1994), metode *Reproducing Kernel Particle* (Liu *et al.*, 1996), metode *Finite Point* (Oñate *et al.*, 1996), metode *Partition of Unity* (Babuska dan Melenk, 1997), dan metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (Zhu dan Atluri, 1998). Metode *meshless* yang relatif baru ini masih terus dikembangkan dan diteliti hingga saat ini, mengingat keunggulan yang dimilikinya cukup berharga. Berikut ini akan dibahas konsep tiga metode *meshless* yang cukup menonjol, yakni metode *element-free Galerkin*, *meshless local Petrov-Galerkin*, dan *finite point*; setelah dibahas

terlebih dahulu pola aproksimasi yang umum dipakai pada metode *meshless*, yakni aproksimasi *moving least-squares*.

4.1 Aproksimasi *Moving Least-Squares (MLS)*

Dalam pengerjaan metode *meshless*, aproksimasi yang digunakan berupa “*curve fitting*” (lebih tepatnya adalah “*least-squares fitting*”), seperti pada Gambar 4.1, sehingga agak berbeda dengan “interpolasi” seperti yang dipakai pada metode elemen hingga (subbab 3.1). Aproksimasi pada metode *meshless* menunjukkan pola di mana secara umum fungsi yang dibuat tidak tepat melewati data titik-titik nodal (atau $n \geq m$, dengan n adalah banyaknya titik nodal yang nilainya berpengaruh pada aproksimasi di suatu titik evaluasi dan m adalah banyaknya monomial dalam *basis function* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$), karena fungsi tersebut tidak bernilai satu pada titik nodal.



Gambar 4.1 Representasi Pola Aproksimasi yang Berupa *Least-Squares Fitting*

Salah satu pola aproksimasi lokal yang umum dipakai karena cukup akurat dan fleksibel baik untuk problem satu, dua, maupun tiga dimensi adalah aproksimasi *moving least-squares (MLS)*, yang diperkenalkan dan diteliti oleh Lancaster dan Salkauskas (1981), McLain (1974), Gordon dan Wixom (1978), dan Barnhill (1977). Diskretisasi spasial pada metode *meshless* dapat diperoleh dengan penggunaan aproksimasi *MLS* yang tidak memakai elemen, namun memakai cara ‘seleksi’ titik-titik nodal. Oleh karena itu, aproksimasi *MLS* dianggap sesuai untuk menentukan *shape function* yang digunakan dalam analisis metode *meshless*.

Pada domain Ω , fungsi aproksimasi *MLS* (*trial function*), $u^h(\mathbf{x})$, dari fungsi *displacement* $u(\mathbf{x})$ diekspresikan dalam vektor dari *basis function* polinomial, $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$, dan vektor dari koefisien, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, sebagai

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

di mana $p_j(\mathbf{x})$ adalah monomial dalam koordinat ruang $\mathbf{x}^T = [x, y]$, dan m adalah banyaknya monomial dalam *basis function*. Bentuk umum dari *basis function* berderajat s yang lengkap dapat dinyatakan dengan

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, x^2, \dots, x^s] \quad \text{dalam satu dimensi, dan} \quad (4.2a)$$

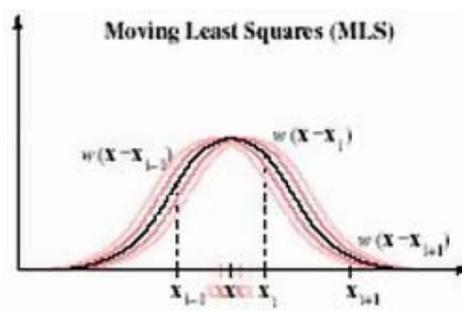
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, \dots, x^s, x^{s-1}y, \dots, xy^{s-1}, y^s] \quad \text{dalam dua dimensi.} \quad (4.2b)$$

Basis yang umum digunakan pada problem dua dimensi adalah

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad \text{untuk basis linear } (m = 3), \text{ dan} \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, xy, x^2, y^2] \quad \text{untuk basis kuadratik } (m = 6). \quad (4.3b)$$

Istilah “*moving*” pada *MLS* muncul karena adanya ketergantungan koefisien \mathbf{a} pada variabel \mathbf{x} , di mana *weight function* didefinisikan untuk setiap titik evaluasi \mathbf{x} yang berbeda di dalam domain, seperti pada Gambar 4.2. Oleh karena itu, dapat dihasilkan aproksimasi yang *smooth* pada seluruh domain.



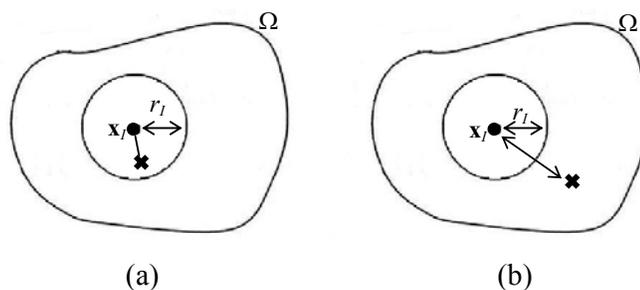
Gambar 4.2 Ilustrasi *Weight Function* pada Prosedur Aproksimasi *MLS* (Fries dan Matthies, 2003)

Persamaan (4.1) menunjukkan aproksimasi *least-squares* secara global. Sebagai tambahan, muncul pula aproksimasi lokal yang unik untuk setiap titik

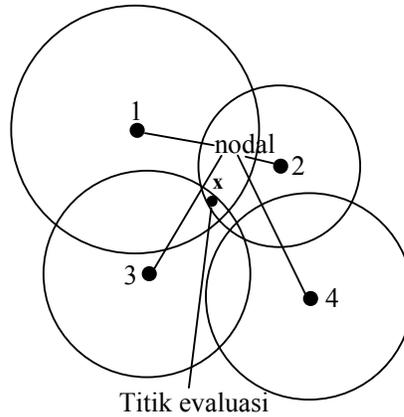
pada domain. Mengingat koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ pada persamaan (4.1) tidak memiliki arti fisik, aproksimasi nilai *displacement field* perlu dimodifikasi dengan menyatakan koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ dalam *d.o.f.* pada nodal, \mathbf{u} . Vektor koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, yang juga merupakan fungsi dari \mathbf{x} , diperoleh di setiap titik evaluasi \mathbf{x} dengan meminimasi suatu *weighted square of discrete error* (L_2 norm) yang berbentuk

$$\begin{aligned} J(\mathbf{x}) &= \sum_{I=1}^n w_I(\mathbf{x}) [u^h(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_I)]^2 \\ &= \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_I]^2 \\ &\equiv [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}]^T \cdot \mathbf{W}(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{P} \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}}], \end{aligned} \quad (4.4)$$

di mana $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ adalah *weight function* yang terkait dengan titik nodal I , dengan $w_I(\mathbf{x}) > 0$ untuk semua \mathbf{x} di dalam *support* dari $w_I(\mathbf{x})$; \mathbf{x}_I menunjukkan nilai koordinat \mathbf{x} pada nodal I ; n adalah banyaknya titik nodal di sekitar titik evaluasi \mathbf{x} , yakni di daerah di mana $w_I(\mathbf{x}) > 0$ (disebut *domain of definition* dari titik \mathbf{x}); dan nilai di dalam kurung siku menunjukkan selisih antara aproksimasi lokal di titik nodal I dengan data di titik nodal I , \hat{u}_I . Pada Gambar 4.3 diilustrasikan bahwa nilai nodal di \mathbf{x}_I berpengaruh pada nilai di titik evaluasi \mathbf{x} dalam aproksimasi *MLS* hanya jika titik \mathbf{x} terletak di dalam *domain of influence* (atau *support*) dari titik nodal I (contoh lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 4.4).



Gambar 4.3 Aproksimasi *MLS* untuk Titik \mathbf{x} Dipengaruhi oleh Nilai Nodal di \mathbf{x}_I hanya jika \mathbf{x} Terletak di Dalam *Domain of Influence* Titik Nodal I (a), di Luar Itu Tidak Ada Pengaruhnya (b)



Gambar 4.4 *Domain of Influence* dari Tiga Titik Nodal yang Beririsan (*Overlap*) di Titik x

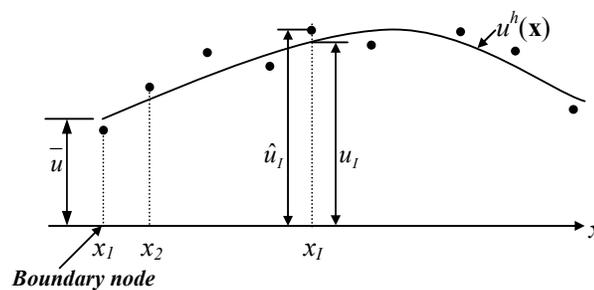
Adapun bentuk dari matriks $\hat{\mathbf{u}}$, \mathbf{P} , dan $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n],$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \dots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times m},$$

$$\text{dan } \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) & \dots & 0 \\ M & M & O & N \\ 0 & 0 & \dots & w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{n \times n}. \quad (4.5)$$

Dalam hal ini perlu diperhatikan bahwa \hat{u}_1 bukan aproksimasi nilai nodal sesungguhnya dari *trial function* $u^h(\mathbf{x})$ yang secara umum belum diketahui, namun merupakan nilai nodal fiktif. Perbedaan antara u_1 dan \hat{u}_1 dalam problem satu dimensi dideskripsikan secara sederhana pada Gambar 4.5.



Gambar 4.5 Ilustrasi Perbedaan antara Variabel *Displacement* u_1 dan \hat{u}_1

Selanjutnya persamaan (4.4) diminimasi dengan cara

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0, \quad (4.6)$$

yang menghasilkan sistem linear sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.7a)$$

$$\text{atau} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.7b)$$

di mana matriks momen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ dan matriks $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ adalah

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} = \sum_{l=1}^n w_l(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_l) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_l), \quad (4.8)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \Lambda \quad w_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]. \quad (4.9)$$

Aproksimasi *MLS* dapat terdefinisi dengan baik jika paling sedikit ada m *weight functions* yang lebih dari nol (umumnya harus $n \geq m$) untuk setiap titik sampel $\mathbf{x} \in \Omega$, dan titik-titik nodal dalam *domain of definition* dari titik \mathbf{x} tidak diatur dalam pola khusus, misalnya suatu garis lurus. Titik sampel yang dimaksud dapat berupa titik nodal yang dievaluasi atau titik kuadratur.

Jika persamaan (4.7b) disubstitusikan ke persamaan (4.1), akan didapatkan bentuk yang serupa dengan fungsi interpolasi pada metode elemen hingga, yaitu

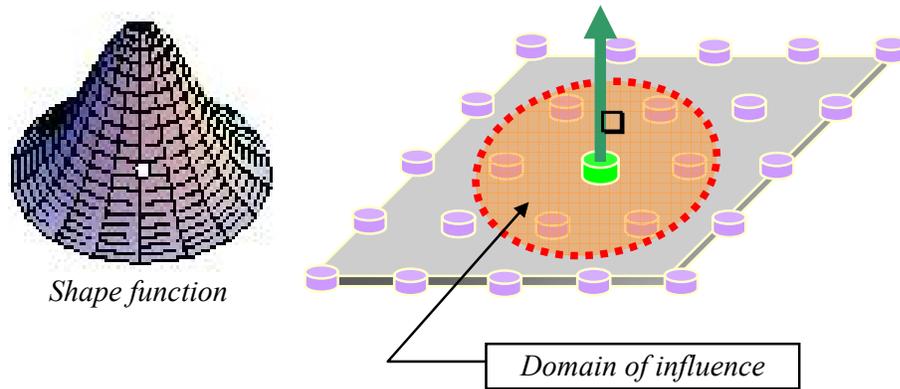
$$u^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{u}} = \sum_{l=1}^n \phi_l(\mathbf{x}) \hat{u}_l; \quad u^h(\mathbf{x}_l) \equiv u_l \neq \hat{u}_l \quad (4.10)$$

di mana *shape function* dari aproksimasi *MLS*, $\phi_l(\mathbf{x})$, didefinisikan dengan

$$\phi_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jl}. \quad (4.11)$$

Dari persamaan (4.9) dan (4.11), dapat dilihat bahwa $\phi_l(\mathbf{x}) = 0$ jika $w_l(\mathbf{x}) = 0$. Secara umum, bentuk fisik *shape function* dari aproksimasi *MLS* untuk problem dua dimensi akan menyerupai *bell-shape*, seperti pada Gambar 4.6. Perlu diingat bahwa aproksimasi pada persamaan (4.10) tidak lagi berbentuk polinomial meskipun *basis function* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ adalah polinomial. Namun jika $u(\mathbf{x})$ adalah suatu polinomial, bentuk tersebut dapat diperoleh kembali dari $u^h(\mathbf{x})$ dengan tepat,

seperti dikemukakan oleh Nayroles *et al.* (1992). Selain itu, koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ pada persamaan (4.7b) tidak diasumsikan konstan agar didapatkan hasil yang lebih akurat. Karenanya, turunan dari $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ sebaiknya tidak diabaikan.



Gambar 4.6 Ilustrasi *Shape Function* pada Metode *Meshless* (Dua Dimensi)

Turunan parsial dari $\phi_i(\mathbf{x})$ akan diperoleh dengan mula-mula menurunkan persamaan (4.7a) terhadap arah i (dengan $i = 1, 2$ untuk problem dua dimensi) pada kedua ruas menjadi

$$\mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_{,i}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.12)$$

sehingga

$$\mathbf{a}_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{B}_{,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})] \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.13)$$

di mana indeks di belakang tanda koma menunjukkan turunan spasial terhadap arah i , misalnya $\mathbf{a}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_i}$. Persamaan (4.1) juga dapat diturunkan pada kedua ruas

menjadi

$$u_{,i}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}_{,i}(\mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Substitusi dari persamaan (4.7b) dan (4.13) ke persamaan (4.14) menghasilkan

$$u_{,i}^h(\mathbf{x}) = \left[\mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}_{,i}(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right] \hat{\mathbf{u}}, \quad (4.15)$$

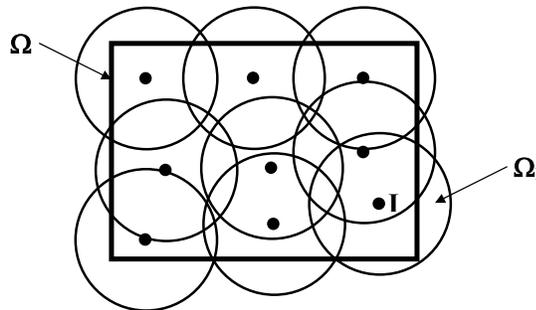
sehingga turunan pertama dari *shape function* aproksimasi *MLS* adalah

$$\begin{aligned} \phi_{,i}(\mathbf{x}) = & \mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{,i}(\mathbf{x}) \\ & - \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.1.1 Weight Function

Karakteristik (misalnya: *smoothness*) dari *shape function* pada aproksimasi *moving least-squares* berhubungan erat dengan *basis function* (polinomial) dan *weight function* yang dipakai dalam analisis. Jika *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ kontinu sampai dengan turunan ke- k (C^k continuous), *shape function* $\phi_I(\mathbf{x})$ juga kontinu sampai dengan turunan ke- k pada seluruh domain (Lancaster dan Salkauskas, 1981). Oleh karena itu, *shape function* dan *trial function* dengan derajat kontinuitas yang lebih tinggi dapat diperoleh dengan membentuk *weight function* yang lebih kontinu pada aproksimasi *MLS* ini.

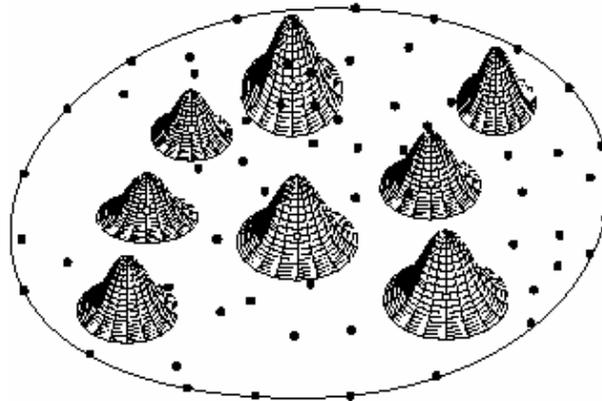
Dalam pengerjaannya, $w_I(\mathbf{x})$ dibuat masih memiliki nilai (tidak nol) pada *support* dari nodal yang bersangkutan (sering juga disebut sebagai *domain of influence* dari suatu nodal). Seperti telah disebutkan, *support* dari suatu *weight function* menunjukkan subdomain di mana nilai *weight function* tersebut tidak nol, sedangkan di luar *support*, $w_I(\mathbf{x})$ harus nol. Bentuk subdomain (*support*) yang umum dipakai adalah lingkaran (dengan pusat di I dan berjari-jari r_I), dengan contoh pada Gambar 4.7, dan segi empat untuk struktur dua dimensi, serta bola pada struktur tiga dimensi. Mengingat kaitannya dengan $w_I(\mathbf{x})$, kondisi di mana $\phi_I(\mathbf{x}) = 0$ untuk \mathbf{x} yang tidak terletak pada *support* dari nodal I tersebut menunjukkan karakter lokal dari aproksimasi *moving least-squares*.



Gambar 4.7 Suatu Domain Global (Ω) dengan *Domain of Influence* (Ω_i) yang Berbentuk Lingkaran untuk Setiap Titik Nodal I

Nilai dari *weight function* harus selalu positif dan harus dapat memberi solusi $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ yang unik. Karenanya, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ harus merupakan matriks yang memiliki invers. Aproksimasi *MLS* dapat terdefinisi dengan baik dengan sedikitnya m *weight functions* yang lebih dari nol (umumnya $n \geq m$) di setiap titik sampel \mathbf{x} . Selain itu, nilai *weight function* pada \mathbf{x}_I harus mengecil seiring dengan bertambah jauhnya jarak dari \mathbf{x} ke \mathbf{x}_I . Dalam menentukan *support* dari *weight function* w_I yang terkait dengan nodal I , perlu diperhatikan kondisi-kondisi berikut:

- Jari-jari dari *support* (atau *radius of influence*), r_I , harus cukup besar agar jumlah titik nodal di dalam *domain of definition* tiap-tiap titik sampel cukup banyak ($n \geq m$), agar didapatkan matriks \mathbf{A} yang *non-singular*.
- Jari-jari dari *support*, r_I , juga harus cukup kecil untuk mempertahankan karakter lokal dari aproksimasi *MLS*, namun tidak terlalu kecil karena berisiko menyebabkan *numerical error* pada penggunaan kuadratur *Gauss* untuk integrasi numerik.



Gambar 4.8 Ilustrasi Bentuk *Weight Function* secara Umum
(Atluri dan Zhu, 1998)

Bentuk persamaan *weight function* dapat dipilih sesuai kebutuhan, selama tetap bernilai positif dan kontinu sampai dengan turunan yang diinginkan (ilustrasi pada Gambar 4.8). Beberapa persamaan *weight function* yang dipakai dalam analisis metode *meshless* secara umum adalah sebagai berikut:

- *Gaussian (Exponential) weight function:*

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{e^{-(d_I/c_I)^{2k}} - e^{-(r_I/c_I)^{2k}}}{(1 - e^{-(r_I/c_I)^{2k}})}, & d_I \leq r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \quad (4.17)$$

dengan c_I merupakan konstanta yang mengontrol bentuk dari *weight function* w_I dan bobot relatifnya;

- *Cubic Spline weight function:*

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3, & s \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3, & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \\ 0, & s > 1, \end{cases} \quad s = d_I/r_I, \quad (4.18)$$

- *Quartic Spline weight function:*

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{d_I}{r_I}\right)^2 + 8\left(\frac{d_I}{r_I}\right)^3 - 3\left(\frac{d_I}{r_I}\right)^4, & d_I \leq r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \quad (4.19)$$

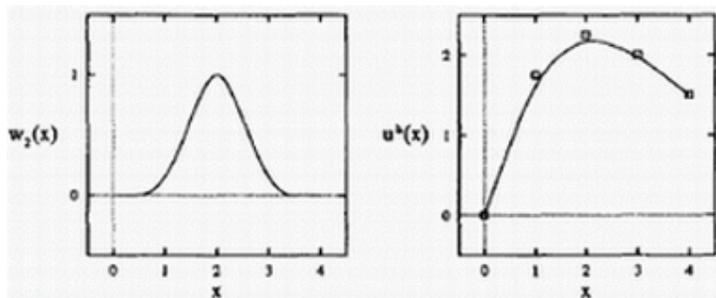
- *Conical weight function:*

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - (d_I/r_I)^{2k}, & d_I \leq r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \quad (4.20)$$

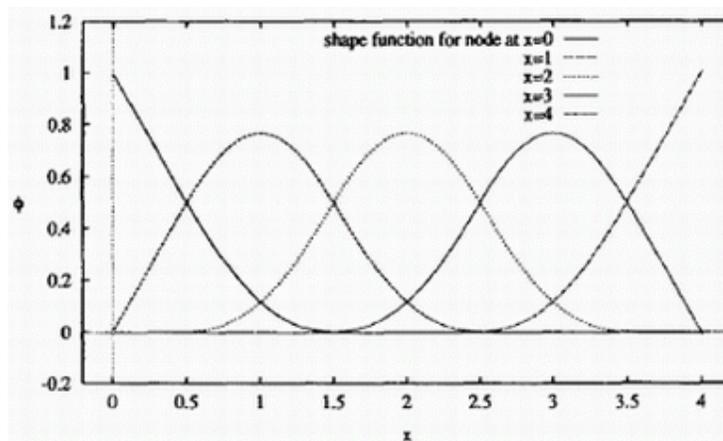
di mana $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$, r_I adalah jari-jari dari *support* untuk *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ yang menentukan *support* dari nodal \mathbf{x}_I .

Gambar 4.9 menunjukkan contoh *weight function* yang memiliki *compact support* (tertentu), begitu juga dengan turunan pertama dan keduanya yang kontinu. *Shape function* yang berkaitan dengan *weight function* tersebut ditunjukkan pada Gambar 4.10, di mana dapat dilihat bahwa $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$. Variabel $\phi_I(\mathbf{x}_J)$ adalah *shape function* dari nodal I yang dievaluasi pada titik nodal \mathbf{x}_J , dan δ_{IJ} adalah *Kronecker delta* (di mana $\delta_{IJ} = 1$ jika $I = J$, namun $\delta_{IJ} = 0$ jika $I \neq J$). Hal ini berarti terdapat lebih dari satu *shape function* yang tidak nol di setiap

nodal, sehingga nilai yang dihasilkan dari sistem persamaan, $\hat{\mathbf{u}}$, bukan nilai nodal sesungguhnya. Nilai nodal sesungguhnya dari suatu titik akan didapatkan dengan menambahkan seluruh pengaruh dari titik nodal lain dengan *shape function* yang tidak nol di titik yang ditinjau.



Gambar 4.9 Contoh *Spline Weight Function* dengan $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x]$ (Beissel, 1996)



Gambar 4.10 Contoh *Shape Function* dengan Penggunaan *Spline Weight Function* pada Gambar 4.9 (Beissel, 1996)

4.2 Metode *Element-Free Galerkin (EFG)*

Dalam metode ini, aproksimasi *MLS* digunakan untuk membentuk *trial function* dan *test function* yang dipakai di dalam *weak form*. *Trial function* merupakan aproksimasi dari *displacement field* yang akan dicari nilainya, sedangkan *test function* dimaksudkan untuk mengontrol nilai *error* secara lebih tepat dengan memberi derajat kepentingan yang lebih pada daerah tertentu yang dievaluasi. Karakteristik dari *displacement field* beserta turunannya adalah kontinu di seluruh domain. Sebenarnya Nayroles *et al.* (1992) yang pada awalnya

memperkenalkan pemikiran tersebut, dengan mengembangkan metode *diffuse element*. Metode ini hanya menggunakan titik-titik nodal dan definisi *boundary* untuk menyelesaikan persamaan *Galerkin*. Tanpa Nayroles *et al.* ketahui, pola aproksimasi yang mereka gunakan tidak lain merupakan aproksimasi *moving least-squares* untuk *curve fitting* yang diperkenalkan pertama kali oleh Lancaster dan Salkauskas (1981). Beranjak dari metode *diffuse element* tersebut, Belytschko *et al.* (1994) mengembangkan metode *element-free Galerkin (EFG)* guna menyempurnakan kelemahan pada metode *diffuse element*, di antaranya adalah dengan memakai kuadratur tingkat tinggi dan memakai *Lagrange multiplier* untuk memasukkan pengaruh kondisi batas esensial.

Metode *element-free Galerkin* belum dapat dikatakan sepenuhnya tanpa *mesh*, karena meskipun tidak mendefinisikan elemen seperti pada metode elemen hingga, namun masih memerlukan bantuan *background cell* yang melingkupi domain struktur sepenuhnya untuk pengerjaan integrasi numerik dalam persamaan (Belytschko *et al.*, 1994). Pengerjaan *weak form* pada metode ini bersifat global, di mana integrasi numerik yang dilakukan meliputi seluruh domain, sehingga diperlukan titik-titik kuadratur yang berjumlah banyak dan letaknya dibagi di dalam tiap-tiap *background cell*.

4.2.1 Weak Form dari Governing Equation

Prinsip kerja virtual, yang telah disebutkan pada subbab 3.2.2, dilambangkan sebagai

$$\delta W - \delta U = \delta W_S + \delta W_B - \delta U = 0, \quad (4.21)$$

dengan

$$\delta W_S = \int_{\Gamma} \bar{t}_i \delta v_i d\Gamma, \quad (4.22)$$

$$\delta W_b = \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega, \quad (4.23)$$

$$\delta U = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega, \quad (4.24)$$

di mana $\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta v_{i,j} + \delta v_{j,i})$ merupakan regangan akibat *displacement field* virtual, δv_i . Karakteristik dari komponen tegangan σ_{ij} pada persamaan (2.20)

adalah simetris, yaitu $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, sehingga dengan menggunakan prinsip dari persamaan (2.16), bentuk $\sigma_{ij} \cdot \delta \varepsilon_{ij}$ dapat diekspresikan sebagai $\sigma_{ij} \cdot \delta v_{i,j}$.

Dalam konteks berikut, *displacement field* u_i dianggap sebagai *trial function*, dan *displacement field* virtual δv_i dipakai sebagai *test function*. Persamaan kesetimbangan pada persamaan (2.20) yang dikalikan dengan *test function* pada kedua ruas, lalu diintegrasikan pada domain Ω akan menghasilkan

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + F_i) \delta v_i d\Omega = 0. \quad (4.25)$$

Dengan memakai cara diferensial, $\sigma_{ij,j} \delta v_i = (\sigma_{ij} \delta v_i)_{,j} - \sigma_{ij} \delta v_{i,j}$, akan diperoleh

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} \delta v_i)_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega = 0. \quad (4.26)$$

Teorema divergensi *Gauss* dalam kalkulus untuk vektor dengan komponen R_j dapat dituliskan sebagai

$$\int_{\Omega} R_{j,k} d\Omega = \int_{\Gamma} R_j n_k d\Gamma, \quad (4.27)$$

di mana Γ merupakan permukaan *boundary* pada domain Ω , dan n_k adalah satuan normal keluar terhadap permukaan $d\Gamma$. Jika teorema divergensi diaplikasikan ke bentuk pertama dalam persamaan (4.26), dan mengingat bahwa $t_i = \sigma_{ij} n_j$, didapatkan

$$\int_{\Gamma} t_i \delta v_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega = 0. \quad (4.28)$$

Karena $t_i = 0$ pada Γ , kecuali di *boundary* Γ_t di mana $t_i = \bar{t}_i$ dari persamaan (2.22b), *weak form* dari *governing equation* dapat diperoleh dari persamaan (4.28) sebagai

$$\int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta v_i d\Gamma + \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega = 0. \quad (4.29)$$

Jika diperhatikan, persamaan (4.29) memiliki bentuk yang sama dengan relasi prinsip kerja virtual pada persamaan (4.21)-(4.24).

Pemakaian aproksimasi *MLS* yang non-interpolan berpengaruh pada tidak dapat terpenuhinya persamaan (2.22a) secara tepat, yaitu *trial function* tidak memenuhi kondisi batas esensial, $u_i = \bar{u}_i$ pada Γ_u . Hal ini dikarenakan *shape function* dari aproksimasi *MLS* tidak memiliki *Kronecker delta property*, yakni $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$, di mana $\phi_I(\mathbf{x}_J)$ adalah *shape function* dari nodal I yang dievaluasi pada titik nodal \mathbf{x}_J , dan δ_{IJ} adalah *Kronecker delta* (di mana $\delta_{IJ} = 1$ jika $I = J$, namun $\delta_{IJ} = 0$ jika $I \neq J$), yang menunjukkan bahwa *shape function* dari titik nodal yang bersangkutan tidak bernilai satu pada nodal tersebut, juga tidak pasti nol di titik nodal lainnya. Jika nodal yang dimaksud terletak pada *boundary*, maka nilai *displacement* yang didapatkan dari hasil penyelesaian persamaan diskret (\hat{u}) tidak sama dengan nilai yang telah ditentukan pada *boundary* (*prescribed* \bar{u}), karenanya \hat{u} disebut nilai nodal fiktif. Oleh karena itu, pada metode *EFG* dipakai *Lagrange multiplier* untuk mengatasi kekurangan tersebut, sehingga persamaan (4.29) menjadi

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta v_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} F_i \delta v_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta v_i d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta \lambda_i d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \lambda_i \delta v_i d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

di mana λ_i dan $\delta \lambda_i$ berturut-turut adalah *Lagrange multiplier* dan *variation* dari *Lagrange multiplier* (untuk lebih jelasnya dapat dilihat di subbab 3.3.1).

4.2.2 Diskretisasi pada Metode *Element-Free Galerkin*

Dengan tujuan mendapatkan persamaan diskret dari *weak form*, *trial function* aproksimasi dan *test function* sama-sama ditentukan dari aproksimasi *MLS*, yakni persamaan (4.10), sehingga

$$u^h(\mathbf{x}) = u = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_J, \quad (4.31)$$

$$\delta v^h(\mathbf{x}) = \delta v = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) \delta \hat{v}_I, \quad (4.32)$$

untuk aproksimasi baik komponen x maupun y (untuk problem dua dimensi) dari *trial function* dan *test function*. Secara umum pada aproksimasi *meshless*, \hat{u}_I dan $\delta\hat{v}_J$ adalah nilai nodal fiktif yang akan didapatkan dari penyelesaian sistem persamaan global. *Lagrange multiplier* diekspresikan secara khusus dengan

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^k N_I(\xi(\mathbf{x})) \lambda_I, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4.33)$$

$$\delta\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^k N_I(\xi(\mathbf{x})) \delta\lambda_I, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad (4.34)$$

di mana $\xi(\mathbf{x})$ merupakan panjang busur sepanjang *boundary*, dan N_I adalah fungsi aproksimasi untuk λ . Sebagai contoh, interpolan *Lagrange* (persamaan (3.5)) seperti pada metode elemen hingga dapat dipakai untuk menentukan N_I .

Displacement field pada analisis dua dimensi, $\mathbf{u}^T = [u_x \quad u_y]$, yang meliputi komponen *displacement* arah x dan y (perlu diperhatikan bahwa indeks x dan y pada variabel berikut ini sama artinya dengan indeks $i = 1, 2$ yang telah lebih dahulu disebutkan) dapat diekspresikan sebagai *nodal displacement* seperti persamaan (4.10), yaitu

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & \phi_N & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & \phi_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_x^1 \\ \hat{u}_y^1 \\ \hat{u}_x^2 \\ \hat{u}_y^2 \\ \vdots \\ \hat{u}_x^N \\ \hat{u}_y^N \end{Bmatrix} = [\Phi][\hat{\mathbf{u}}]. \quad (4.35)$$

Merujuk pada persamaan (2.14b), *strain field* dapat dituliskan sebagai

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{1,x} & 0 & \phi_{2,x} & 0 & \Lambda & \phi_{N,x} & 0 \\ 0 & \phi_{1,y} & 0 & \phi_{2,y} & \Lambda & 0 & \phi_{N,y} \\ \phi_{1,y} & \phi_{1,x} & \phi_{2,y} & \phi_{2,x} & \Lambda & \phi_{N,y} & \phi_{N,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u}_x^1 \\ \hat{u}_y^1 \\ \hat{u}_x^2 \\ \hat{u}_y^2 \\ \vdots \\ \hat{u}_x^N \\ \hat{u}_y^N \end{Bmatrix}, \quad (4.36)$$

yang dapat dilambangkan secara sederhana dengan

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\hat{\mathbf{u}}\}, \quad (4.37)$$

di mana

$$[\mathbf{B}] = [[\mathbf{B}_1] [\mathbf{B}_2] \dots [\mathbf{B}_N]],$$

$$[\mathbf{B}_I] = \begin{bmatrix} \phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \phi_{I,y} \\ \phi_{I,y} & \phi_{I,x} \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\hat{\mathbf{u}}\} = \begin{Bmatrix} \hat{u}_x^1 \\ \hat{u}_y^1 \\ \hat{u}_x^2 \\ \hat{u}_y^2 \\ \mathbf{M} \\ \hat{u}_x^N \\ \hat{u}_y^N \end{Bmatrix}. \quad (4.38)$$

Lagrange multiplier field dapat diekspresikan dengan notasi matriks dari persamaan (4.33) sebagai

$$\begin{Bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \Lambda & N_k & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \Lambda & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_x^1 \\ \lambda_y^1 \\ \lambda_x^2 \\ \lambda_y^2 \\ \mathbf{M} \\ \lambda_x^k \\ \lambda_y^k \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \{\boldsymbol{\lambda}\}, \quad (4.39)$$

di mana

$$[\mathbf{N}] = [[\mathbf{N}_1] [\mathbf{N}_2] \dots [\mathbf{N}_k]],$$

$$[\mathbf{N}_I] = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix},$$

$$\{\boldsymbol{\lambda}\} = \begin{Bmatrix} \lambda_x^1 \\ \lambda_y^1 \\ \lambda_x^2 \\ \lambda_y^2 \\ \mathbf{M} \\ \lambda_x^k \\ \lambda_y^k \end{Bmatrix}. \quad (4.40)$$

Serupa dengan persamaan (4.37) dan (4.39), nilai *variational* dapat diekspresikan menggunakan *shape function* yang telah disebutkan, sehingga

$$\{\delta \boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{B}] \{\delta \hat{\mathbf{v}}\}, \quad (4.41)$$

$$\begin{bmatrix} \delta \lambda_x \\ \delta \lambda_y \end{bmatrix} = [\mathbf{N}] \{\delta \boldsymbol{\lambda}\}, \quad (4.42)$$

dengan

$$\{\delta \hat{\mathbf{v}}\} = \begin{Bmatrix} \delta \hat{v}_x^1 \\ \delta \hat{v}_y^1 \\ \delta \hat{v}_x^2 \\ \delta \hat{v}_y^2 \\ \mathbf{M} \\ \delta \hat{v}_x^N \\ \delta \hat{v}_y^N \end{Bmatrix}, \quad \{\delta \boldsymbol{\lambda}\} = \begin{Bmatrix} \delta \lambda_x^1 \\ \delta \lambda_y^1 \\ \delta \lambda_x^2 \\ \delta \lambda_y^2 \\ \mathbf{M} \\ \delta \lambda_x^k \\ \delta \lambda_y^k \end{Bmatrix}. \quad (4.43)$$

Relasi tegangan - regangan dari persamaan (2.2) dapat dituliskan dalam bentuk matriks menjadi

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\}, \quad (4.44)$$

di mana uraian mengenai pemilihan matriks $[\mathbf{E}]$ sesuai kondisi *plane stress* atau *plane strain* dapat dilihat pada subbab 2.1.

Weak form pada persamaan (4.30) untuk analisis dua dimensi dapat dituliskan dalam notasi matriks sebagai

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega - \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_u} \begin{Bmatrix} \delta \lambda_x \\ \delta \lambda_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} d\Gamma - \int_{\Gamma_\lambda} \begin{Bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Gamma} \begin{Bmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{Bmatrix} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Dalam bentuk diskret, persamaan (4.45) dapat diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned} & \{\delta \hat{\mathbf{v}}\}^T \left[[\mathbf{K}_{IJ}] \{\hat{\mathbf{u}}_J\} - \{\mathbf{f}_I^\Omega\} - \{\mathbf{f}_I^\Gamma\} + [\mathbf{G}_{IJ}] \{\boldsymbol{\lambda}_J\} \right] \\ & + \{\delta \boldsymbol{\lambda}\}^T \left[[\mathbf{G}_{IJ}]^T \{\hat{\mathbf{u}}_J\} - \{\mathbf{q}_I\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Karena $\{\delta\hat{\mathbf{v}}\}$ dan $\{\delta\boldsymbol{\lambda}\}$ merupakan variasi yang sembarang, kedua suku besar pada persamaan (4.46) dapat dipisahkan dan masing-masing dibuat sama dengan nol, sehingga didapatkan dua persamaan diskret yang dalam bentuk matriks berupa

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{IJ}] & [\mathbf{G}_{IJ}] \\ [\mathbf{G}_{IJ}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{\mathbf{u}}_J\} \\ \{\boldsymbol{\lambda}_J\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_I\} \\ \{\mathbf{q}_I\} \end{Bmatrix}, \quad (4.47)$$

atau dalam sistem persamaan global (*assembled*) diperoleh hasil akhir:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}] & [\mathbf{G}] \\ [\mathbf{G}]^T & [\mathbf{0}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\hat{\mathbf{u}}\} \\ \{\boldsymbol{\lambda}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}\} \\ \{\mathbf{q}\} \end{Bmatrix}, \quad (4.48)$$

di mana dalam analisis dua dimensi,

$$[\mathbf{K}_{IJ}] = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_I]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}_J] d\Omega, \quad (4.49)$$

$$[\mathbf{G}_{IJ}] = - \int_{\Gamma_u} [\mathbf{N}_I] \phi_J d\Gamma, \quad (4.50)$$

$$\{\mathbf{f}_I\} = \int_{\Gamma_f} \phi_I \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_I \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} d\Omega, \quad (4.51)$$

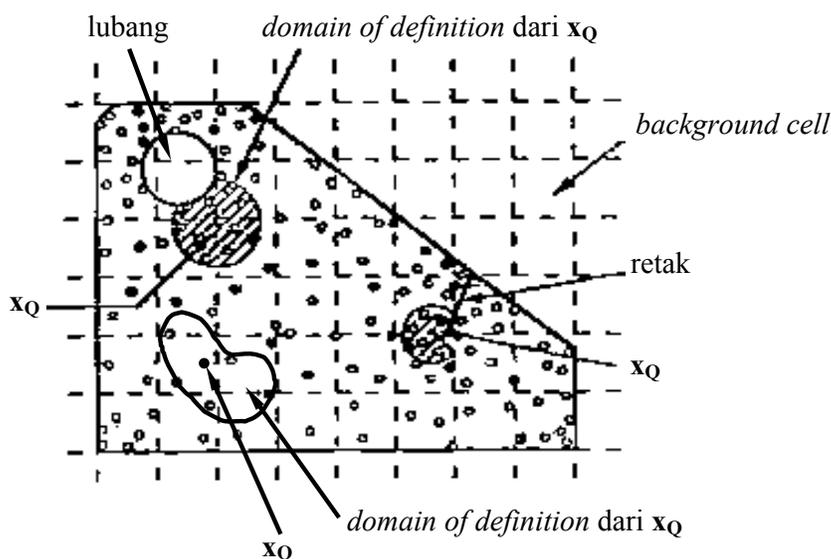
$$\{\mathbf{q}_I\} = - \int_{\Gamma_u} N_I \begin{Bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \end{Bmatrix} d\Gamma. \quad (4.52)$$

Pada persamaan (4.48), $\{\hat{\mathbf{u}}\}$ dan $\{\boldsymbol{\lambda}\}$ berturut-turut adalah vektor dari nilai *displacement* nodal yang fiktif dan *Lagrange multiplier* yang akan diperoleh dengan menyelesaikan sistem persamaan tersebut. Nilai displacement yang sesungguhnya, u_I , akan diperoleh dengan memasukkan nilai \hat{u}_I tersebut ke dalam persamaan (4.31). Karakteristik dari matriks kekakuan pada persamaan (4.48) umumnya adalah simetris (Belytschko *et al.*, 1994).

4.2.3 Integrasi pada Metode *Element-Free Galerkin*

Pada metode *EFG*, Belytschko *et al.* (1994) membuat struktur *background cell* yang melingkupi seluruh domain struktur untuk pengerjaan integrasi numerik pada persamaan (4.49)-(4.52). Pembagian *background cell*

tersebut tidak tergantung pada posisi titik-titik nodal, namun biasanya disusun dalam pola yang teratur. Banyaknya *background cell* yang dipakai tidak tertentu, serta tidak berhubungan dengan banyaknya *d.o.f.*, namun cukup mempengaruhi akurasi dari solusi numeriknya. Ilustrasi mengenai hal ini dapat dilihat pada Gambar 4.11. *Background cell* juga berfungsi untuk membantu dalam hal identifikasi titik-titik nodal yang memiliki kontribusi kepada L_2 norm diskret di titik kuadratur, yaitu pada persamaan (4.4).



Gambar 4.11 Struktur *Background Cell* pada Metode EFG dan Contoh *Domain of Definition* dari Tiga Titik Kuadratur (Belytschko *et al.*, 1994)

Integrasi numerik dapat diselesaikan antara lain dengan cara kuadratur *Gauss-Legendre*, di mana di tiap *background cell* diberi titik-titik kuadratur *Gauss* yang jumlahnya tidak diatur secara pasti, namun biasanya tergantung dari jumlah nodal dalam suatu *background cell*. Dapat dikatakan bahwa perakitan (*assembly*) dilakukan di setiap titik kuadratur, karena setiap titik kuadratur bisa mendapat pengaruh yang berbeda yang tergantung dari titik-titik nodal yang terletak di dalam *domain of definition* dari x_Q saja, dan selanjutnya hasil kontribusi dari titik-titik kuadratur akan dikumpulkan di setiap titik nodal yang bersangkutan di dalam matriks kekakuan struktur, sesuai dengan nomor *d.o.f.* masing-masing. Dari Gambar 4.11 juga dapat dilihat bahwa *domain of definition* dari suatu titik tidak

melebihi/melewati *boundary* apapun, misalnya jika titik kuadratur, \mathbf{x}_Q , berada di dekat suatu retakan atau lubang maka *domain of definition* dari \mathbf{x}_Q dibatasi hanya mempengaruhi titik-titik nodal \mathbf{x}_I yang dapat terhubung ke \mathbf{x}_Q tanpa berpotongan dengan retakan atau lubang (berkaitan dengan diskontinuitas struktur).

Analisis struktur dengan metode *EFG* secara umum dapat dijalankan dengan alur sebagai berikut:

1. menentukan titik-titik nodal, *basis function* dan *weight function* yang dapat mendefinisikan aproksimasi *MLS* dengan baik,
2. menentukan *domain of influence* dari titik-titik nodal,
3. menentukan *background cell* pada Ω , Γ_t , dan Γ_u ,
4. menentukan titik-titik kuadratur untuk setiap *cell* Ω_c dan untuk setiap *boundary cell* Γ_{tc} dan Γ_{uc} ,
5. melakukan pengulangan (*loop*) pada *background cell* di dalam domain dan pada *boundary*,
6. melakukan pengulangan (*loop*) di titik kuadratur \mathbf{x}_Q di dalam *background cell*,
 - a. jika titik kuadratur berada di luar domain, pemeriksaan dilanjutkan ke titik kuadratur lainnya;
 - b. memeriksa semua titik nodal untuk menentukan n titik nodal \mathbf{x}_I , dengan $I = 1, \dots, n$ di dalam *domain of definition* dari \mathbf{x}_Q ;
 - c. jika muncul segmen *boundary* (misalnya retak atau lubang) di dalam *background cell* di sekeliling *cell* yang ditinjau, dan jika $\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_Q$ berpotongan dengan segmen *boundary*, dilanjutkan ke pemeriksaan titik kuadratur lainnya;
 - d. menghitung $\phi_I(\mathbf{x}_Q)$ dan $\phi_{I,i}(\mathbf{x}_Q)$ di titik kuadratur;
 - e. mengevaluasi integrasi numerik pada persamaan (4.49)-(4.51);
 - f. merakit (*assemble*) kontribusi dari 6. e. untuk titik-titik nodal;
7. mengakhiri pengulangan di titik kuadratur,
8. mengakhiri pengulangan pada *background cell*,
9. menyelesaikan sistem persamaan linear untuk mendapatkan $\hat{\mathbf{u}}$,
10. menghitung nilai *displacement* dengan persamaan (4.31), regangan, dan tegangan pada titik-titik sampel yang ditinjau.

Kontribusi dari titik kuadratur untuk persamaan linear tergantung dari titik-titik nodal di dalam *domain of definition* dari \mathbf{x}_Q . Setiap titik kuadratur memberikan nilai yang lebih dari nol kepada persamaan hanya untuk titik-titik nodal yang ada di dalam *domain of definition*, di luar itu bilangan di dalam matriks \mathbf{K} adalah nol.

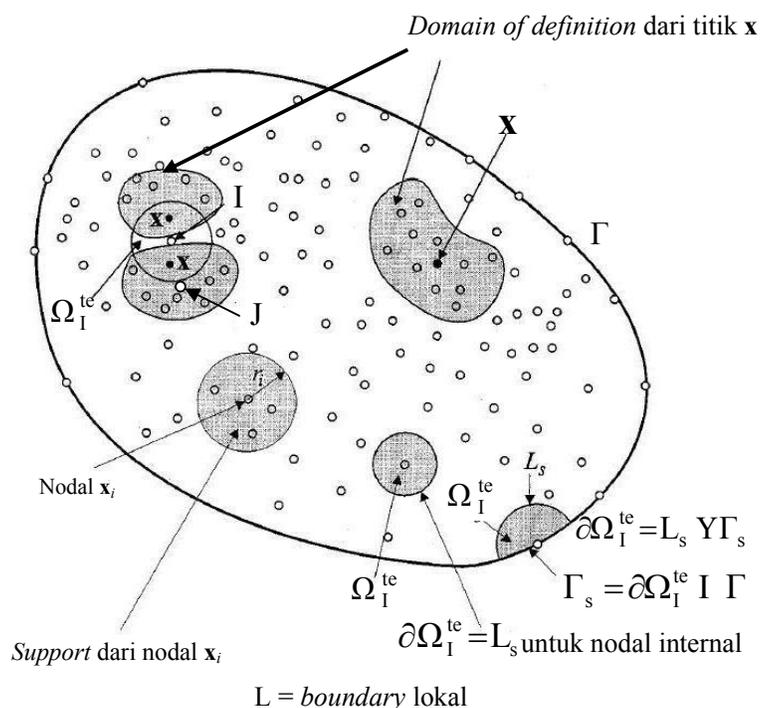
4.3 Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)*

Metode *meshless local Petrov-Galerkin (MLPG)* yang awalnya diperkenalkan oleh Zhu dan Atluri (1998) ini menggunakan *local symmetric weak form (LSWF)* dan *shape function* dari aproksimasi *moving least-squares (MLS)*. Pada pengerjaannya, metode *MLPG* dapat dikatakan “benar-benar tanpa *mesh*” (*truly meshless*), karena bantuan penggunaan *mesh* dasar memang tidak diperlukan untuk menginterpolasi variabel yang dihasilkan ataupun mengintegrasikan. Semua integral dapat dievaluasi langsung di dalam subdomain lokal (beserta *boundary* lokal) dengan bentuk yang teratur, yang biasanya berbentuk lingkaran untuk problem dua dimensi (atau dapat pula memakai bentuk-bentuk teratur lainnya) dan berpusat di setiap titik evaluasi.

Kondisi batas esensial yang belum dapat langsung terpenuhi (yaitu $u_i = \bar{u}_i$ pada Γ_u) dengan aproksimasi *MLS* perlu dimasukkan pengaruhnya dengan bantuan metode penalti, yang untuk lebih jelasnya dapat dilihat di subbab 3.3.2. Nilai *displacement* yang didapatkan dari hasil penyelesaian persamaan diskret (\hat{u}) untuk nodal yang terletak pada *boundary* tidak sama dengan nilai yang telah ditentukan pada *boundary* (*prescribed* \bar{u}). Seperti telah disebutkan pada subbab 4.2.1, hal ini dikarenakan *shape function* dari aproksimasi *MLS* tidak memiliki *Kronecker delta property*, yakni $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ (di mana $\delta_{IJ} = 1$ jika $I = J$, namun $\delta_{IJ} = 0$ jika $I \neq J$).

Weak form pada metode *MLPG* tidak langsung dipenuhi secara global pada seluruh domain Ω , melainkan dikerjakan dahulu dalam subdomain lokal (dikenal dengan istilah *LSWF*) yang seluruhnya berada di dalam domain global Ω . Serupa pada subbab 4.1, penamaan subdomain yang dipakai untuk memperjelas uraian (ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 4.12), antara lain:

- *Support* dari nodal \mathbf{x}_I menunjukkan suatu subdomain lokal (biasanya dipakai bentuk lingkaran berjari-jari r_I) di mana *weight function* w_I pada aproksimasi *MLS*, terkait dengan nodal \mathbf{x}_I , masih memiliki nilai (tidak nol).
- *Domain of definition* dari titik \mathbf{x} (untuk aproksimasi *MLS*) menunjukkan suatu subdomain yang melingkupi titik-titik nodal dengan *weight function* yang tidak nol di \mathbf{x} ($w_I(\mathbf{x}) \neq 0, I = 1, 2, \dots, n$).



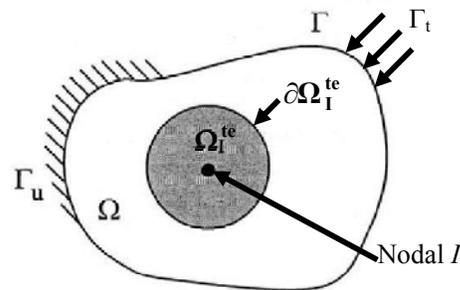
Gambar 4.12 Ilustrasi Subdomain yang Digunakan pada Metode *MLPG* (Zhu dan Atluri, 1998)

4.3.1 Local Symmetric Weak Form (LSWF)

Penggunaan subdomain sebagai lokasi pengerjaan *weak form* membentuk karakter lokal dari metode *MLPG*. Istilah *symmetric weak form* menunjukkan kondisi di mana tingkat diferensiasi dari *trial function* (u) dan *test function* (v) pada suatu *weak form* adalah sama, yang didapatkan setelah *weighted residual form* pada persamaan diferensial diintegrasikan parsial beberapa kali. Bentuk *LSWF* dituliskan pada persamaan (4.55), berikut dengan keterangannya.

Pada metode *MLPG* ini digunakan metode *Petrov-Galerkin*, yang dapat memakai fungsi aproksimasi yang berbeda untuk menentukan masing-masing

trial function dan *test function*, misalnya $\phi_I(\mathbf{x})$ ditentukan dari fungsi aproksimasi *MLS* dan $\Psi_I(\mathbf{x})$ untuk nodal I diambil dari *weight function* yang dipakai pada aproksimasi *MLS* (namun tidak harus demikian). Secara khusus, sebenarnya *test function* tidak harus nol pada *boundary* tempat didefinisikannya kondisi batas esensial. Pada uraian selanjutnya, Ω_J^r melambangkan subdomain lokal yang berpusat di titik nodal J , di mana nilai *trial-shape function* nodal tersebut tidak nol, sedangkan Ω_I^{te} melambangkan subdomain lokal yang berpusat di titik nodal I , di mana nilai *test-shape function* nodal tersebut tidak nol, seperti diilustrasikan pada Gambar 4.13.



Gambar 4.13 Ilustrasi dari Ω_I^{te} dengan Pusat I dan *Boundary* $\partial\Omega_I^{te}$, serta Ω adalah Domain Global dengan *Boundary* Γ , dengan Γ_u adalah *Dirichlet Boundary* dan Γ_t adalah *Neumann Boundary*

Secara umum, *local weak form* dari persamaan kesetimbangan pada persamaan (2.20) dan kondisi batas pada persamaan (2.22) dituliskan sebagai

$$\int_{\Omega_I^{te}} (\sigma_{ij,j} + b_i) v_i d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0, \quad (4.53)$$

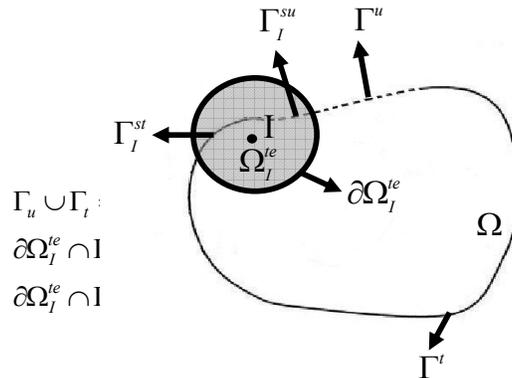
di mana Γ_I^{su} adalah perpotongan dari Γ_u dengan *boundary* $\partial\Omega_I^{te}$ (keterangan mengenai *boundary* dapat dilihat lebih jelas pada Gambar 4.14), u_i dan v_i berturut-turut adalah *trial function* dan *test function*, dan α adalah bilangan penalti. Jika lokasi subdomain lokal Ω_I^{te} seluruhnya berada di dalam domain global Ω , dan tidak ada perpotongan antara *boundary* lokal $\partial\Omega_I^{te}$ dan *boundary* global Γ , bentuk integral pada Γ_I^{su} hilang. Dengan prinsip diferensiasi serupa dengan persamaan

(4.26) dan teorema divergensi *Gauss* dari persamaan (4.27), bentuk persamaan (4.53) dapat diubah menjadi

$$\int_{\partial\Omega_I^{te}} \sigma_{ij} n_j v_i d\Gamma - \int_{\Omega_I^{te}} (\sigma_{ij} v_{i,j} - b_i v_i) d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} (u_i - \bar{u}_i) v_i d\Gamma = 0, \quad (4.55)$$

di mana n_j adalah satuan normal keluar terhadap *boundary* $\partial\Omega_I^{te}$.

Dengan tujuan untuk menyederhanakan persamaan (4.55), secara sembarang dapat dipilih *test function* yang menjadi nol pada L_s (berupa lingkaran untuk titik nodal internal, atau berbentuk busur untuk titik nodal di *boundary* Γ). Hal ini dapat diperoleh dengan menggunakan *nodal-test-shape function* yang tidak memiliki nilai (atau nol) pada L_s , juga dapat berupa fungsi apa saja asalkan dapat diintegrasikan dan tidak berisiko mengakibatkan *numerical error*. Jadi bentuk dari subdomain lokal Ω_I^{te} dan Ω_J^{tr} dalam dua dimensi dapat berupa lingkaran, elips, *rectangular*, poligon, ataupun lainnya selama kriteria tersebut tetap terpenuhi.

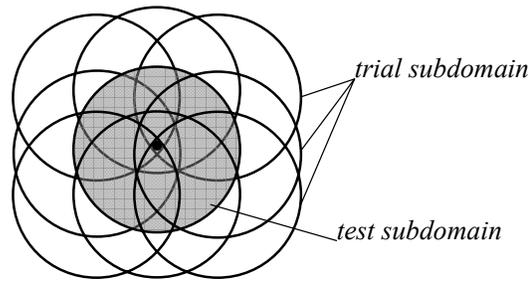


Gambar 4.14 Perpotongan antara Suatu Ω_I^{te} dengan *Boundary* Γ_u Dinamakan Γ_{su} , dan dengan *Boundary* Γ_t Dinamakan Γ_{st}

Dengan menggunakan *test function* sesuai kriteria yang baru saja disebutkan pada persamaan (4.54) dan memasukkan pengaruh kondisi batas non-esensial, dapat diperoleh *local symmetric weak form (LSWF)* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_I^{te}} \sigma_{ij} v_{i,j} d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} u_i v_i d\Gamma - \int_{\Gamma_I^{st}} t_i v_i d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_I^{st}} \bar{t}_i v_i d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \bar{u}_i v_i d\Gamma + \int_{\Omega_I^{te}} F_i v_i d\Omega, \end{aligned} \quad (4.55)$$

di mana $t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$, dan Γ_i^{st} adalah perpotongan dari Γ_i dan *boundary* $\partial\Omega_i^{te}$ (lihat pada Gambar 4.14). Dari bentuk integral di awal persamaan (4.55) nampak bahwa σ_{ij} merupakan turunan pertama dari *trial function* u , begitu pula dengan $v_{i,j}$ yang berarti turunan pertama dari *test function* v . Kondisi inilah yang menunjukkan makna “*symmetric*” dalam istilah “*local symmetric weak form*”, dan dikerjakan dalam area subdomain sehingga bersifat lokal. Jika lokasi subdomain lokal Ω_i^{te} seluruhnya berada di dalam domain global Ω , tidak ada perpotongan antara *boundary* lokal $\partial\Omega_i^{te}$ dan *boundary* global Γ , sehingga bentuk integral pada Γ_i^{su} dan Γ_i^{st} hilang. Persamaan (4.55) menyatakan baris ke- I di dalam matriks kekakuan global, sedangkan isi dari kolom ke- J berkaitan dengan semua titik nodal yang memiliki *domain of influence*, Ω_j^r , yang berpotongan dengan subdomain *test function* ke- I , Ω_i^{te} , seperti dapat dilihat pada Gambar 4.15.



Gambar 4.15 Perpotongan Ω_i^{te} dengan Seluruh Ω_j^r yang Memiliki Kontribusi (Komponen yang Tidak Nol) kepada Matriks Kekakuan Struktur Baris ke- I

4.3.2 Diskretisasi dan Integrasi pada Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin*

Bentuk aproksimasi *trial function* dan *test function* yang dipakai pada metode *MLPG* secara berturut-turut dapat dituliskan sebagai

$$u^h(\mathbf{x}) = u = \sum_{J=1}^N \phi_J(\mathbf{x}) \hat{u}_J, \quad (4.56)$$

$$v^h(\mathbf{x}) = v = \sum_{I=1}^N \psi_I(\mathbf{x}) \hat{v}_I, \quad (4.57)$$

di mana $\phi_I(\mathbf{x})$ dan $\Psi_I(\mathbf{x})$ masing-masing adalah *nodal shape function* untuk *trial function* dan *test function* dengan pusat di nodal J dan I . Biasanya, bentuk fisik dari *trial function* pada domain dua dimensi menyerupai *bell-shape*, karena nilainya menurun dari puncak secara *smooth* sampai nol pada *boundary* dari *support*. Secara umum dalam aproksimasi pada *meshless*, \hat{v}_I^i dan \hat{u}_J^i merupakan nilai nodal fiktif, bukan nilai sesungguhnya, yaitu u_i .

Banyaknya subdomain lokal yang diperlukan harus sama dengan banyaknya titik nodal di dalam domain global agar didapatkan persamaan yang sama jumlahnya dengan variabel yang belum diketahui. Substitusi dari persamaan (4.56) dan (4.57) ke *LSWF* pada persamaan (4.55) dan memfaktorkan \hat{v}_I^i (karena terdapat di tiap suku pada persamaan (4.55), serta dapat dipilih secara sembarang) keluar dari persamaan, akan menghasilkan sistem persamaan diskret dari metode *MLPG* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \sum_{J=1}^N \int_{\Omega_I^s} (\mathbf{B}_I^v)^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J \hat{\mathbf{u}}_J d\Omega + \alpha \sum_{J=1}^N \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \phi_J \hat{\mathbf{u}}_J d\Gamma - \sum_{J=1}^N \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{B}_J \hat{\mathbf{u}}_J d\Gamma \\ & = \int_{\Gamma_I^{st}} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_I^s} \mathbf{V}_I \mathbf{F} d\Omega, \end{aligned} \quad (4.58)$$

di mana dalam ruang dua dimensi,

$$\mathbf{B}_I^v = \begin{bmatrix} \psi_{I,1} & 0 \\ 0 & \psi_{I,2} \\ \psi_{I,2} & \psi_{I,1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \phi_{J,1} & 0 \\ 0 & \phi_{J,2} \\ \phi_{J,2} & \phi_{J,1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_I = \begin{bmatrix} \psi_I & 0 \\ 0 & \psi_I \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_J = \begin{Bmatrix} \hat{u}_J^1 \\ \hat{u}_J^2 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \bar{\nu})/2 \end{bmatrix},$$

$$\text{dengan } \bar{E} = \begin{cases} E \\ \frac{E}{1 - \bar{\nu}^2} \end{cases} \quad \text{dan} \quad \bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{untuk kondisi } \textit{plane stress}, \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \text{untuk kondisi } \textit{plane strain}. \end{cases}$$

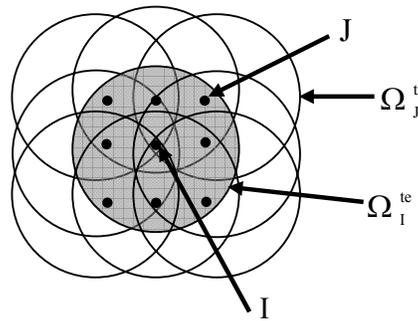
Pada persamaan di atas, (n_1, n_2) adalah vektor normal pada *boundary*, E adalah modulus elastisitas (*Young*), dan ν adalah *Poisson's ratio*. Selanjutnya, persamaan (4.58) dapat dituliskan dengan bentuk persamaan yang lebih sederhana, yaitu

$$\sum_{J=1}^N \mathbf{K}_{IJ} \hat{\mathbf{u}}_J = \mathbf{f}_I, \quad (4.59)$$

di mana N adalah jumlah semua titik nodal, dan

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega_I^s} (\mathbf{B}_I^v)^T \mathbf{E} \mathbf{B}_J d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \phi_J d\Gamma - \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \mathbf{N} \mathbf{E} \mathbf{B}_J d\Gamma, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_I^{st}} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I \bar{\mathbf{u}} d\Gamma + \int_{\Omega_I^s} \mathbf{V}_I \mathbf{F} d\Omega. \quad (4.61)$$



Gambar 4.16 Integrasi Dikerjakan di Dalam Subdomain Lokal Ω_I^{te} untuk Setiap J dengan Tujuan Mengevaluasi \mathbf{K}_{IJ}

Pada metode *MLPG*, proses perakitan (*assembly*) yang biasa dilakukan, yaitu merakit komponen dari matriks kekakuan lokal yang tidak nol ke dalam matriks kekakuan global berdasarkan nomor tiap *d.o.f.*, tidak diperlukan untuk membentuk matriks kekakuan global. Integral pada persamaan (4.60) dan (4.61) dapat dievaluasi langsung di dalam subdomain lokal Ω_I^{te} (Gambar 4.16) dengan bentuk yang teratur dan berpusat di setiap titik evaluasi, misalnya dengan kuadratur numerik *Gauss-Legendre*. Dalam pengerjaan metode *MLPG*, setiap *local symmetric weak form* (hanya mengevaluasi satu *test function* dan semua *trial function* yang subdomain lokalnya berpotongan dengan *support* dari *test function*, seperti pada Gambar 4.16) menghasilkan dua baris (khusus untuk problem dua dimensi, karena di setiap titik nodal ada dua *unknown* arah x dan y) komponen

yang tidak nol di dalam matriks kekakuan global. Secara teoritis, jika gabungan dari seluruh subdomain lokal Ω_I^{te} dapat melingkupi domain global, maka persamaan kesetimbangan dan kondisi batas dapat terpenuhi di seluruh domain global Ω dan sepanjang *boundary* Γ (Atluri *et al.*, 1999).

Karakteristik dari matriks kekakuan struktur pada metode *MLPG* umumnya tidak simetris, mengingat aproksimasi *test function* dan *trial function* yang digunakan bisa berbeda. Ukuran (jari-jari) dari Ω_I^{te} dan Ω_J^{tr} secara umum juga boleh sembarang, berbeda satu sama lain, ataupun berbeda untuk tiap-tiap I dan J . Namun jika Ω_I^{te} dan Ω_J^{tr} untuk setiap I dan J berjari-jari sama, dan jika u_i dan v_i yang berpusat di nodal ke- I dan ke- J berturut-turut sama untuk setiap I dan J , maka matriks kekakuan menjadi simetris. Dengan menyelesaikan persamaan (4.59) akan didapatkan nilai *displacement* fiktif \hat{u}_J di setiap titik nodal J . Hasil aproksimasi dapat diperoleh dari persamaan (4.56), dan turunannya dapat dicari untuk mendapatkan regangan dan tegangan.

Analisis struktur dengan metode *MLPG* secara umum dapat dijalankan dengan alur sebagai berikut:

1. menentukan titik-titik nodal (di dalam domain Ω dan pada *boundary* Γ), *basis function* dan *weight function* yang dapat mendefinisikan aproksimasi *MLS* dengan baik,
2. menentukan subdomain lokal, Ω_I^{te} , beserta *boundary* lokal yang bersangkutan, $\partial\Omega_I^{te}$, untuk setiap titik nodal (ilustrasi dapat dilihat pada Gambar 4.13),
3. melakukan pengulangan (*loop*) di semua titik nodal di dalam domain global dan pada *boundary* global Γ ,
4. menentukan titik kuadratur (*Gauss*) \mathbf{x}_Q di dalam Ω_I^{te} dan pada $\partial\Omega_I^{te}$,
5. melakukan pengulangan (*loop*) di titik kuadratur \mathbf{x}_Q di dalam Ω_I^{te} dan pada $\partial\Omega_I^{te}$,
 - a. memeriksa semua titik nodal untuk menentukan n titik nodal \mathbf{x}_J , dengan $J = 1, \dots, n$ di dalam *domain of definition* dari \mathbf{x}_Q ;
 - b. menghitung $\phi_J(\mathbf{x}_Q)$, $\phi_{J,i}(\mathbf{x}_Q)$, $\Psi_I(\mathbf{x}_Q)$, dan $\Psi_{I,i}(\mathbf{x}_Q)$ di titik kuadratur;

- c. mengevaluasi integrasi numerik pada persamaan (4.60) dan (4.61);
 - d. merakit (*assemble*) kontribusi dari 5. c. kepada sistem persamaan linear untuk semua titik nodal di \mathbf{K} , \mathbf{f} ;
6. mengakhiri pengulangan di titik kuadratur,
 7. mengakhiri pengulangan di titik nodal,
 8. menyelesaikan sistem persamaan linear untuk mendapatkan $\hat{\mathbf{u}}$,
 9. menghitung nilai *displacement* dengan persamaan (4.56) beserta turunannya pada titik-titik sampel yang ditinjau.

4.4 Metode Finite Point (FPM)

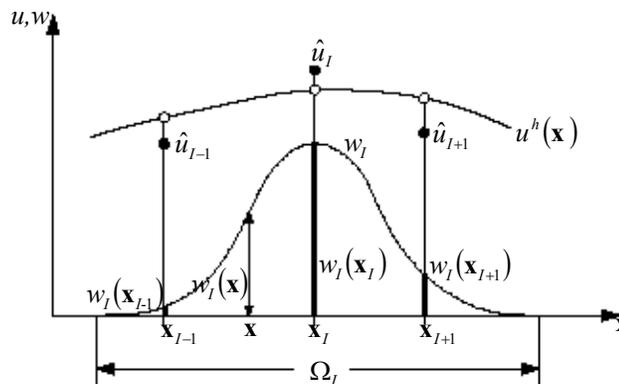
Prinsip dasar dari metode *finite point* adalah penggunaan prosedur aproksimasi *weighted least-squares* bersama-sama dengan *point collocation* untuk menghilangkan bentuk integral yang muncul di persamaan umum pada *weighted residual form*. Aproksimasi *fixed least-squares (FLS)*, yang merupakan salah satu bentuk dari aproksimasi *weighted least-squares*, digunakan oleh Onate *et al.* (1998) untuk merepresentasikan nilai-nilai dari variabel yang belum diketahui di beberapa lokasi acak titik-titik nodal. Metode ini adalah metode yang “benar-benar tanpa *mesh*” (*truly meshless*), karena *governing differential equation* dipenuhi di setiap titik nodal pada domain (*point collocation*) untuk memperoleh persamaan diskret aproksimasi, dan tidak lagi diperlukan bantuan *cell* atau semacamnya, mengingat tidak diperlukannya integrasi.

4.4.1 Aproksimasi Fixed Least-Squares (FLS)

Prosedur pengerjaan aproksimasi *FLS* untuk mendapatkan *shape function* pada dasarnya serupa dengan aproksimasi *moving least-squares* yang telah diuraikan pada subbab 4.1. Perbedaannya terletak pada penentuan *weight function* yang dipakai, yang juga akan berpengaruh pada penentuan koefisien \mathbf{a} . Daerah yang digunakan untuk aproksimasi *displacement field* tidak lain merupakan *domain of influence (DOI)* dari titik nodal yang ditinjau, dapat dilihat pada Gambar 4.17. *Weight function* pada aproksimasi *FLS* ditentukan (*fixed*) di suatu titik nodal (misalnya di \mathbf{x}_I) dan dievaluasi di titik \mathbf{x} , atau $w_I(\mathbf{x}) = w_I(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$, dengan kriteria sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 w_I(\mathbf{x}_I) &= 1, \\
 w_I(\mathbf{x}) &\neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_I, \\
 w_I(\mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \notin \Omega_I,
 \end{aligned}
 \tag{4.62}$$

di mana Ω_I merupakan *domain of influence* dari titik \mathbf{x}_I .



Gambar 4.17 Ilustrasi *Weight Function* pada Prosedur Aproksimasi *Displacement Field* dengan *FLS*

Seperti disebutkan sebelumnya, fungsi aproksimasi $u^h(\mathbf{x})$ didefinisikan di tiap *domain of influence* Ω_I , di mana Ω_I yang berbeda dapat memiliki *shape function* yang berbeda pula. Pada umumnya, suatu titik \mathbf{x} dapat terletak pada beberapa *domain of influence* yang saling berpotongan (*overlap*), sehingga w_I biasanya bukan satu-satunya fungsi yang memiliki nilai di \mathbf{x} (berarti ada beberapa nilai *shape function* yang berbeda di suatu titik). Dengan alasan praktis, cukup dipilih suatu nilai w_I yang paling besar pengaruhnya saja; hal ini dimungkinkan oleh prosedur *point collocation* yang menekankan nilai aproksimasi hanya di suatu titik \mathbf{x} . Pada setiap titik \mathbf{x} dengan posisi yang berbeda, perlu dipilih w_I yang lain sehingga memang mengandung risiko adanya loncatan (*jump*) pada nilai aproksimasi. Koefisien \mathbf{a} adalah nilai konstan selama hanya ada suatu w_I tertentu yang diperhitungkan di suatu titik \mathbf{x} , jika tidak demikian maka akan dihasilkan \mathbf{a} yang berbeda, dan mengarah kepada aproksimasi *multivalued*.

4.4.2 Diskretisasi pada Metode *Finite Point*

Salah satu cara umum untuk menyelesaikan *governing differential equation* secara numerik adalah dengan metode *weighted residual*, di mana fungsi *displacement* u diaproksimasi dengan *trial function* u^h sehingga

$$\int_{\Omega} W_I [A(u_i^h) + F_i] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{W}_I [B(u_i^h) - \bar{t}_i] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{W}}_I [u_i^h - \bar{u}_i] d\Gamma = 0, \quad (4.63)$$

dengan W_I , \bar{W}_I , dan $\bar{\bar{W}}_I$ merupakan *weight function* yang secara berturut-turut berkaitan dengan persamaan (2.20) dan kondisi batas pada persamaan (2.22). Pada metode *finite point* dipakai prosedur *point collocation* (seperti pada subbab 3.2.3.1) agar diperoleh keuntungan berupa hilangnya bentuk integral pada persamaan (4.63), maka ditetapkan $W_I = \bar{W}_I = \bar{\bar{W}}_I = \delta(x_I - x)$, dengan komponen *Dirac delta* sebagai berikut:

$$\delta(x_I - x) = \begin{cases} 0, & x \neq x_I \\ 1, & x = x_I \end{cases} \quad (4.64)$$

Persamaan diskretisasi pada metode *finite point* diperoleh dengan mensubstitusikan fungsi aproksimasi dari *displacement*, u^h , ke persamaan diferensial kesetimbangan (*governing differential equation*) pada persamaan (2.20) dan kondisi batas pada persamaan (2.22), yang dikerjakan dengan prosedur *point collocation* pada setiap titik nodal yang ditinjau, diekspresikan sebagai

$$\begin{aligned} [A(u_i^h) + F_i]_p &= 0 \quad \text{di } \Omega, \quad p = 1, 2, \dots, N_r, \\ [(u_i^h)]_s &= \bar{u}_i \quad \text{pada } \Gamma_u, \quad s = 1, 2, \dots, N_u, \\ [B(u_i^h) - \bar{t}_i]_r &= 0 \quad \text{pada } \Gamma_t, \quad r = 1, 2, \dots, N_t, \end{aligned} \quad (4.65)$$

dengan N_r adalah banyaknya titik nodal pada domain Ω selain yang terletak pada *boundary* Γ_u dan Γ_t , serta N_u dan N_t berturut-turut adalah banyaknya titik nodal yang terletak pada *boundary* Γ_u dan Γ_t . Pada persamaan (4.65), A dan B merupakan operator diferensial untuk mendefinisikan *governing differential*

equation yang harus dipenuhi masing-masing pada Ω dan Γ_t , di mana $A(u_i^h) = \sigma_{ij,j}$ dan $B(u_i^h) = \sigma_{ij} n_j$.

Dari persamaan (4.65) dapat diperoleh bentuk persamaan diskret, yaitu

$$\mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (4.66)$$

di mana \mathbf{K} adalah matriks kekakuan struktur, $K_{IJ} = [A(\phi_I)]_I + [B(\phi_I)]_I$, $\hat{\mathbf{u}}$ adalah vektor dari nilai nodal *unknown* fiktif, dan \mathbf{f} adalah vektor dari gaya luar yang bekerja pada struktur. Karakteristik dari matriks kekakuan yang dibentuk dengan metode *finite point* ini biasanya tidak simetris, mengingat dilakukannya prosedur *point collocation* (Onate *et al.*, 2001).

Adapun prosedur *point collocation* yang digunakan dalam metode ini dapat menyebabkan sistem persamaan mengalami *ill-condition* (kondisi di mana determinan matriks sama dengan nol), sehingga solusi yang didapatkan dari persamaan (4.66) menjadi tidak stabil dan kurang akurat. Hal ini terutama diakibatkan ketidakmampuan metode *point collocation* untuk memenuhi persamaan kesetimbangan di *domain of influence* secara tepat hanya dengan mewakili persamaan di ‘titik’ nodal pada daerah tersebut, terutama pada daerah di dekat *boundary* (di mana *DOI* biasanya tidak simetris).

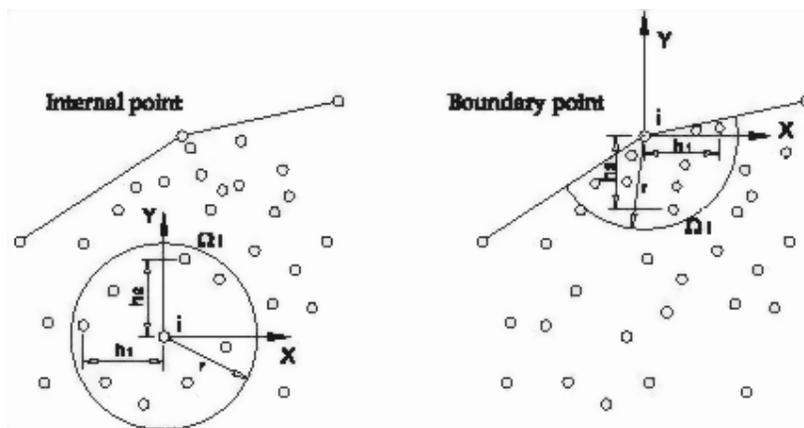
Kelemahan dari prosedur *point collocation* tersebut dapat diatasi dengan menggunakan sejenis prosedur stabilisasi. Prosedur stabilisasi yang dipakai pada metode *finite point* adalah dengan cara memodifikasi sistem persamaan, yaitu menambahkan suatu bentuk aljabar yang *residual-based* kepada persamaan asli untuk mempertahankan konsistensi metode ini. Bentuk *residual-based* yang dimaksud, khususnya pada problem elastisitas, dapat berupa suatu fungsi dari *governing differential equation* sendiri (yang sebenarnya merupakan residu). Akan tetapi, aturan secara umum untuk memilih bentuk tersebut belum dapat ditentukan dengan pasti dan perlu diteliti lebih lanjut (Onate *et al.*, 2001).

Onate *et al.* (2001) menggunakan bentuk stabilisasi untuk *governing equation* yang diturunkan dengan prosedur *Finite Calculus (FIC)*. Dasar yang dipakai dari prosedur *FIC* adalah bahwa hukum kesetimbangan umum harus dipenuhi pada suatu domain dengan ukuran tertentu (terhingga). Dengan prosedur tersebut, secara alami akan diperoleh bentuk baru yang mengandung unsur

stabilisasi pada *governing differential equation*. Persamaan diskret dengan bentuk stabilisasi yang menggunakan prosedur *FIC* pada metode *finite point* didapatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \left[A(u_i^h) + F_i - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial}{\partial x_k} (A(u_i^h) + F_i) \right]_p = 0 \quad p = 1, 2, \dots, N_r, \\ & [u_i^h]_s = \bar{u}_i \quad s = 1, 2, \dots, N_u, \\ & \left[B(u_i^h) - \bar{t}_i - \frac{1}{2} h_k n_k (A(u_i^h) + F_i) \right]_r = 0 \quad r = 1, 2, \dots, N_t, \end{aligned} \quad (4.67)$$

di mana n_k adalah komponen satuan normal terhadap *boundary* Γ_t dan h_k adalah dimensi dari *balance domain* (disebut juga parameter panjang karakteristik), dengan $k = 1, 2$ untuk struktur dua dimensi (Gambar 4.18). Bentuk aljabar yang digarisbawahi pada persamaan (4.67) menyatakan stabilisasi yang diperlukan dalam persamaan diferensial kesetimbangan (*governing equation*) pada tingkatan diskret.



Gambar 4.18 Prosedur Seleksi Titik Nodal pada *Domain of Influence* 2D, dan Definisi dari Panjang Karakteristik (h_k) untuk Nodal Interior dan *Boundary* (Oñate *et al.*, 2001)

Persamaan (4.67) dapat dituliskan dalam bentuk matriks standard sebagai

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_s(h_k)) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f}, \quad (4.68)$$

sehingga nilai nodal fiktif \hat{u}_i dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan tersebut. Nilai *displacement* yang sesungguhnya di titik nodal, u_i , akan didapatkan

dengan memasukkan nilai \hat{u}_i ke dalam persamaan (4.10). Matriks \mathbf{K} yang baru pada persamaan (4.68) menyatakan matriks kekakuan dari persamaan (4.66) yang telah mengandung unsur stabilisasi, yaitu dengan adanya \mathbf{K}_s yang merupakan suatu fungsi dari parameter panjang karakteristik, h_k .

Kondisi batas esensial ($u_i = \bar{u}_i$) pada metode *FPM* dapat diaplikasikan langsung (*direct collocation*) pada sistem persamaan (4.68) dengan menetapkan bahwa nilai *displacement* di titik nodal pada *Dirichlet boundary* harus sama dengan nilai *displacement* yang sudah ditentukan (*prescribed*). Bagaimanapun, mengingat bahwa aproksimasi *FLS* merupakan *curve fitting* yang tidak tepat melewati data nodal (seperti pada Gambar 4.17), maka cara tersebut hanya merupakan sebuah pendekatan.

Analisis struktur dengan metode *finite point* secara umum dapat dijalankan dengan alur sebagai berikut:

1. menentukan titik-titik nodal (di dalam domain Ω dan pada *boundary* Γ), *basis function* dan *weight function* yang dapat mendefinisikan aproksimasi *FLS* dengan baik,
2. menentukan *domain of influence* dari setiap titik nodal,
3. melakukan pengulangan (*loop*) di semua titik nodal di dalam domain global dan pada *boundary* global Γ ,
 - a. menentukan *shape function* (ϕ) untuk setiap titik nodal evaluasi;
 - b. merakit (*assemble*) komponen-komponen di dalam matriks \mathbf{K} , \mathbf{f} dari semua titik nodal ke dalam sistem persamaan;
4. mengakhiri pengulangan di titik nodal,
5. menyelesaikan sistem persamaan linear untuk mendapatkan $\hat{\mathbf{u}}$,
6. menghitung nilai *displacement* dengan persamaan (4.10) beserta turunannya pada titik-titik sampel yang ditinjau.

4.4.3 Prosedur Stabilisasi pada Metode *Finite Point*

Seperti telah diuraikan pada subbab 4.4.2, persamaan stabilisasi untuk problem elastisitas dapat diekspresikan sebagai

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i - \frac{1}{2} h_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) = 0 \quad \text{di } \Omega, \quad (4.69)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{pada } \Gamma_u, \quad (4.70)$$

$$\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i - \frac{1}{2} h_k n_k \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \right) = 0 \quad \text{pada } \Gamma_t, \quad (4.71)$$

dengan $i, j, k = 1, 2$ untuk struktur dua dimensi, σ_{ij} adalah komponen tegangan yang berkaitan dengan *displacement field* u , F_i merupakan komponen dari *body force* yang bekerja di arah i pada Ω , traksi pada permukaan dilambangkan $t_i = \sigma_{ij} \cdot n_j$, dengan n_j dan n_k adalah satuan normal terhadap *boundary* Γ , serta \bar{u}_i dan \bar{t}_i berturut-turut merupakan nilai dari *displacement* dan traksi pada *boundary* Γ_u dan Γ_t yang sudah ditetapkan (*prescribed*). $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, Γ_u menunjukkan *boundary* tempat didefinisikannya kondisi batas esensial (*Dirichlet boundary*), sedangkan Γ_t menunjukkan *boundary* tempat didefinisikannya kondisi batas non-esensial (*Neumann boundary*).

Pada persamaan (4.69) dan (4.71) dapat dilihat bahwa ada bentuk stabilisasi yang masing-masing mensyaratkan perhitungan turunan ke-3 dan turunan ke-2 dari *displacement*. Hal ini tentunya perlu diperhatikan dalam memilih derajat kontinuitas dari aproksimasi untuk *displacement field*. Onate *et al.* (2001) juga mengungkapkan bahwa sebenarnya bentuk stabilisasi muncul terutama dari kondisi batas non-esensial, sedangkan pada persamaan kesetimbangan di dalam domain Ω , bentuk stabilisasi tersebut dapat diabaikan untuk keperluan praktis. Pernyataan tersebut cukup konsisten dengan prediksi awal bahwa penyebab terjadinya *ill-condition* pada sistem persamaan adalah tidak simetrisnya *domain of influence* di daerah *boundary*.