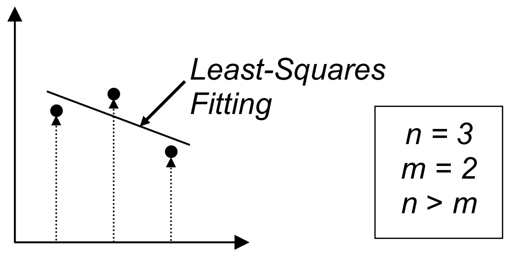
2. LANDASAN TEORI

Metode *meshless* merupakan suatu metode aproksimasi yang digunakan untuk menganalisa struktur yang rumit dengan cara mendefinisikan titik-titik nodal dan kondisi batas dalam suatu domain untuk menjadi permodelan struktur sesungguhnya. Pada metode *meshless*, kesulitan prosedur *meshing* dan *remeshing* (kelemahan pada metode elemen hingga) pada struktur elemen yang kompleks dapat dihilangkan karena prosedur diskretisasi dan rediskretisasi dalam suatu domain dapat dilakukan cukup dengan menambahkan atau mengurangi titik nodal pada lokasi yang diinginkan. Secara umum, metode *meshless* yang harus dapat mempertahankan karakter analisis numerik secara lokal, menggunakan aproksimasi lokal (aproksimasi *Moving Least-Squares*) untuk merepresentasikan *trial function* dengan nilai-nilai dari variabel yang belum diketahui di beberapa lokasi acak titik-titik nodal.

Karena metode *meshless* merupakan metode yang sedang berkembang, maka banyak berbagai variasi metode *meshless* yang pada dasarnya melakukan diskretisasi tanpa elemen yang serupa, namun tetap berprioritas pada perbaikan akurasi dan konvergensinya. Beberapa metode *meshless* yang cukup terkenal antara lain, metode *Element-Free Galerkin* (Belytschko *et al*., 1994), metode *Finite Point* (Onate *et al*., 1996), dan metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (Zhu dan Atluri, 1998). Karena keunggulan yang dimiliki metode *meshless* cukup berharga, maka metode yang relatif baru ini masih terus dikembangkan dan diteliti hingga saat ini. Berikut ini akan dibahas salah satu metode *meshless* yang cukup menonjol, yakni metode *meshless local Petrov-Galerkin* (*MLPG*). Tapi sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu pola aproksimasi *moving least-squares* (pola aproksimasi yang umum dipakai dalam metode *MLPG*), *weight function* dan kuadratur *Gauss* yang akan dipakai dalam perhitungan *MLPG*.

2.1 Aproksimasi *Moving Least-Squares* (*MLS*)

Aproksimasi pada metode *MLPG* menunjukkan pola dimana secara umum fungsi yang dibuat tidak tepat melewati data titik-titik nodal (atau $n \geq m$), dengan n adalah banyaknya titik nodal yang nilainya berpengaruh pada aproksimasi di suatu titik evaluasi dan m adalah banyaknya monomial dalam *basis function* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$. Maka pada *MLPG* aproksimasi yang digunakan berupa "*least-squares fitting*", seperti dicontohkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Representasi Pola Aproksimasi yang Berupa *Least-Squares Fitting*

Moving Least-Squares (*MLS*) merupakan salah satu pola aproksimasi lokal yang umum dipakai karena cukup akurat dan fleksibel dalam menginterpolasi data untuk problem satu, dua, maupun tiga dimensi, yang diperkenalkan dan diteliti oleh Lancaster dan Salkauskas (1981), McLain (1974), Gordon dan Wixom (1978), dan Barnhill (1977).

Aproksimasi *MLS* dianggap sesuai untuk menentukan *shape function* yang digunakan dalam analisis metode *MLPG* karena diskretisasi spasial pada metode *MLPG* dapat diperoleh dengan penggunaan aproksimasi *MLS* yang tidak memakai elemen, namun memakai cara 'seleksi' titik-titik nodal. Aproksimasi *MLS* merupakan aproksimasi lokal pada titik evaluasi $\mathbf{x}$, dimana hanya titik-titik nodal $\mathbf{x_I}$ yang terletak di dalam *domain of definition* dari titik evaluasi $\mathbf{x}$ yang memiliki nilai dan di luar *domain of influence* titik nodal $\mathbf{x_I}$ bernilai nol**.**

Aproksimasi *MLS (trial function)* dari fungsi $u^h(\mathbf{x})$ pada domain Ω diekspresikan dalam vektor dari *basis function* polinomial, $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$, dan vektor dari koefisien, $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, sebagai :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})\, a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\, \mathbf{a}(\mathbf{x}), \qquad (2.1)$$

di mana $p_j(\mathbf{x})$ adalah monomial dalam koordinat ruang $\mathbf{x}^T = \lfloor x, y \rfloor$, $a_j(\mathbf{x})$ adalah sebuah vektor yang mengandung koefisien $a_j(\mathbf{x})$ dimana j = 1, 2, 3, … m, dan m

adalah banyaknya monomial dalam *basis function*. Bentuk umum dari *basis function* berderajat *s* yang lengkap dapat dinyatakan dengan,

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \lfloor 1, x, x^2, \ldots.., x^s \rfloor \quad \text{dalam satu dimensi, dan} \tag{2.2a}$$

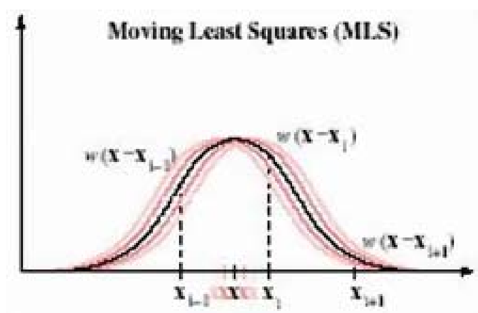
$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \lfloor 1, \ldots., x^s, x^{s-1} y, \ldots.., xy^{s-1}, y^s \rfloor \quad \text{dalam dua dimensi.} \tag{2.2b}$$

Basis yang umum digunakan pada problem dua dimensi adalah

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \lfloor 1, x, y \rfloor \quad \text{untuk basis linear } (m = 3)\text{, dan} \tag{2.3a}$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \lfloor 1, x, y, xy, x^2, y^2 \rfloor \quad \text{untuk basis kuadratik } (m = 6). \tag{2.3b}$$

Istilah "*moving*" pada *MLS* muncul karena adanya ketergantungan koefisien **a** pada variabel **x**, dimana *weight function* didefinisikan untuk setiap titik evaluasi **x** yang berbeda di dalam domain, seperti pada Gambar 2.2. Oleh karena itu, dapat dihasilkan aproksimasi yang *smooth* pada seluruh domain (*derivative continue* dan *smooth*) (S. N. Atluri, H.-G. Kim, J. Y. Cho, 1999).



Gambar 2.2 Ilustrasi *Weight Function* pada Prosedur Aproksimasi *MLS* (Fries dan Matthies, 2003)

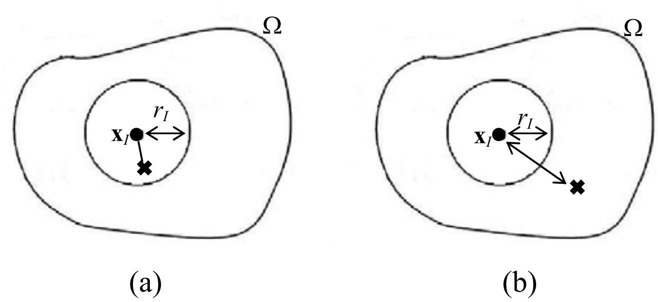
Persamaan (2.1) menunjukkan aproksimasi *least-squares* secara global. Mengingat koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ pada persamaan (2.1) kurang memiliki arti fisik, aproksimasi nilai *displacement field* perlu dimodifikasi dengan menyatakan koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ dalam *d.o.f.* pada nodal, **u**. Vektor koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ diperoleh di setiap titik evaluasi **x** dengan meminimasi suatu *weighted square of discrete error* (L_2 *norm*) yang berbentuk

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n} w_I(\mathbf{x}) \, [u^h(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}) - \hat{u}(\mathbf{x}_I)\,]^2$$

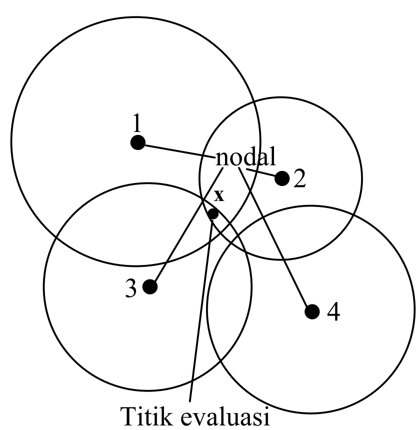
$$= \sum_{I=1}^{n} w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \, [\, \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I) \, \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{u}_I \,]^2$$

$$\equiv [\, \mathbf{P} \, . \, \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}} \,]^T \, . \, \mathbf{W}(\mathbf{x}) \, . \, [\, \mathbf{P} \, . \, \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{u}} \,], \qquad (2.4)$$

di mana $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ adalah *weight function* yang terkait dengan titik nodal I, dengan $w_I(\mathbf{x}) > 0$ untuk semua $\mathbf{x}$ di dalam *support* dari $w_I(\mathbf{x})$; $\mathbf{x}_I$ menunjukkan nilai koordinat $\mathbf{x}$ pada nodal I; n adalah banyaknya titik nodal di sekitar titik evaluasi $\mathbf{x}$, yakni di daerah di mana $w_I(\mathbf{x}) > 0$ (disebut *domain of definition* dari titik $\mathbf{x}$); dan nilai di dalam kurung siku menunjukkan selisih antara aproksimasi lokal di titik nodal I dengan data di titik nodal I, $\hat{u}_I$. Pada Gambar 2.3 diilustrasikan bahwa nilai nodal di $\mathbf{x}_I$ berpengaruh pada nilai di titik evaluasi $\mathbf{x}$ dalam aproksimasi *MLS* hanya jika titik $\mathbf{x}$ terletak di dalam *domain of influence* (atau *support)* dari titik nodal I (contoh lebih jelas dapat dilihat pada Gambar 2.4).



Gambar 2.3 Aproksimasi *MLS* untuk Titik **x** Dipengaruhi oleh Nilai Nodal di $\mathbf{x}_I$ hanya jika **x** Terletak di Dalam *Domain of Influence* Titik Nodal I (a), di Luar Itu Tidak Ada Pengaruhnya (b)



Gambar 2.4 *Domain of Influence* dari Tiga Titik Nodal yang Beririsan (*Overlap*) di Titik **x**

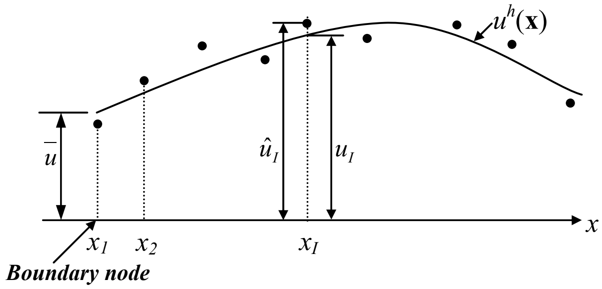
Bentuk dari matriks $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{P}$, dan $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ adalah sebagai berikut :

$\hat{\mathbf{u}}^T = [\ \hat{u}_1, \hat{u}_2, \ldots, \hat{u}_n\ ]$,

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_1) \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_2) \\ \ldots \\ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{nxm},$$

dan
$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_2) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & w(\mathbf{x}-\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{nxn}. \tag{2.5}$$

Dalam hal ini perlu diperhatikan bahwa $\hat{u}_I$ bukan aproksimasi nilai nodal sesungguhnya dari *trial function* $u^h(\mathbf{x})$ yang secara umum belum diketahui, namun merupakan nilai nodal fiktif. Perbedaan antara u_I dan $\hat{u}_I$ dalam problem satu dimensi dideskripsikan secara sederhana pada Gambar 2.5.



Gambar 2.5 Ilustrasi Perbedaan antara Variabel *Displacement* u_I dan $\hat{u}_I$

Selanjutnya persamaan (2.4) diminimasi dengan cara

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0, \tag{2.6}$$

yang menghasilkan sistem linear sebagai berikut:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x})\,\hat{\mathbf{u}}, \tag{2.7a}$$

atau
$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x})\,\hat{\mathbf{u}}, \tag{2.7b}$$

di mana matriks momen $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ dan matriks $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ adalah

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \ \mathbf{W}(\mathbf{x})\,\mathbf{P} = \sum_{I=1}^{n} w_I(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_I)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_I)\,, \tag{2.8}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \ \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \left[w_1(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad w_2(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \ \cdots \ w_n(\mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}_n)\right]. \tag{2.9}$$

Aproksimasi *MLS* dapat terdefinisi dengan baik apabila matriks A adalah matriks yang *non-singular*. Hal ini didapat apabila ada sedikitnya *m weight functions* yang lebih dari nol (umumnya harus $n \geq m$) untuk setiap titik sampel $\mathbf{x} \in \Omega$, dan titik-titik nodal dalam *domain of definition* dari titik $\mathbf{x}$ tidak diatur dalam pola khusus, misalnya suatu garis lurus. Titik sampel yang dimaksud dapat berupa titik nodal yang dievaluasi atau titik kuadratur.

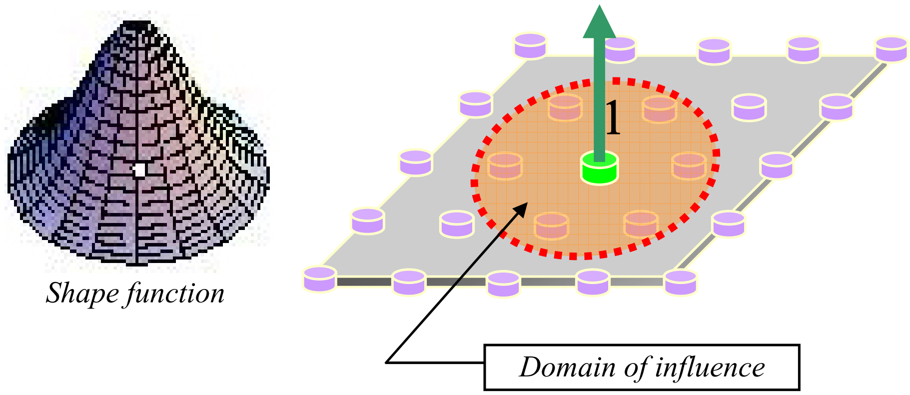
Jika persamaan (2.7b) disubstitusikan ke persamaan (2.1), akan didapatkan bentuk yang serupa dengan fungsi interpolasi pada metode elemen hingga, yaitu

$$u^h(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x})\ .\ \hat{\mathbf{u}} = \sum_{I=1}^{n} \phi_I(\mathbf{x})\,\hat{u}_I\,; \qquad u^h(\mathbf{x}_I) \equiv u_I \neq \hat{u}_I \tag{2.10}$$

di mana *shape function* dari aproksimasi *MLS*, $\phi_I(\mathbf{x})$, didefinisikan dengan

$$\phi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} p_j(\mathbf{x})\,(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI}. \tag{2.11}$$

Dari persamaan (2.9) dan (2.11), dapat dilihat bahwa $\phi_I(\mathbf{x}) = 0$ jika $w_I(\mathbf{x}) = 0$. Perlu diingat bahwa aproksimasi pada persamaan (2.10) tidak lagi berbentuk polinomial meskipun *basis function* $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ adalah polinomial. Namun jika $u(\mathbf{x})$ adalah suatu polinomial, bentuk tersebut dapat diperoleh kembali dari $u^h(\mathbf{x})$ dengan tepat, seperti dikemukakan oleh Nayroles *et al.* (1992). Selain itu koefisien $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ pada persamaan (2.7b), merupakan fungsi yang berubah-ubah pada setiap titik evaluasi $\mathbf{x}$ yang ditinjau (tidak konstan), maka tidak dapat diasumsikan konstan, agar didapatkan hasil yang lebih akurat. Karenanya, turunan dari $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ sebaiknya tidak diabaikan. Secara umum, bentuk fisik *shape function* dari aproksimasi *MLS* untuk problem dua dimensi akan menyerupai *bell-shape*, seperti pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Ilustrasi *Shape Function* pada Metode *Meshless* (Dua Dimensi)

Turunan parsial dari $\phi_I(\mathbf{x})$ akan diperoleh dengan mula-mula menurunkan persamaan (2.7a) terhadap arah i (dengan i = 1, 2 untuk problem dua dimensi) pada kedua ruas menjadi

$$\mathbf{A},_i(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x})\,\mathbf{a},_i(\mathbf{x}) = \mathbf{B},_i(\mathbf{x})\,\hat{\mathbf{u}}\,, \tag{2.12}$$

sehingga

$$\mathbf{a},_i(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\left[\mathbf{B},_i(\mathbf{x}) - \mathbf{A},_i(\mathbf{x})\,\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\,\mathbf{B}(\mathbf{x})\right]\hat{\mathbf{u}}\,, \tag{2.13}$$

di mana indeks di belakang tanda koma menunjukkan turunan spasial terhadap arah i, misalnya $\mathbf{a},_i = \dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}_i}$. Persamaan (2.1) juga dapat diturunkan pada kedua ruas menjadi

$$u,_i^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p},_i^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\,\mathbf{a},_i(\mathbf{x}). \tag{2.14}$$

Substitusi dari persamaan (2.7b) dan (2.13) ke persamaan (2.14) menghasilkan

$$\begin{aligned} u,_i^h(\mathbf{x}) = \big[&\mathbf{p},_i^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B},_i(\mathbf{x}) \\ &- \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A},_i(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\big]\hat{\mathbf{u}}\ , \end{aligned} \tag{2.15}$$

sehingga turunan pertama dari *shape function* aproksimasi *MLS* adalah

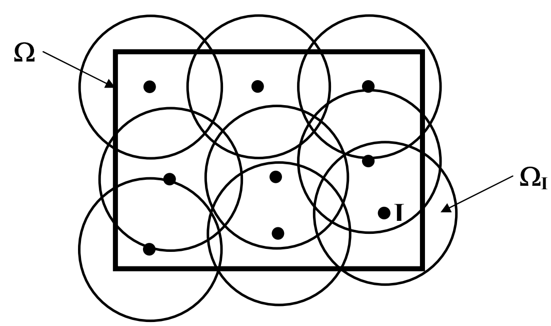
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi},_i(\mathbf{x}) = \ &\mathbf{p},_i^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B},_i(\mathbf{x}) \\ &- \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A},_i(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.2 *Weight Function*

Bentuk dari *shape function* yang digunakan pada aproksimasi *MLS* secara umum sama dengan *weight function*, karena karakteristik dari *shape function* berhubungan erat dengan *weight function* dan *basis function* yang dipakai dalam aproksimasi *MLS*. Jika *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ kontinu sampai dengan turunan ke-*k* (C^k *continuous*), *shape function* $\phi_I(\mathbf{x})$ juga kontinu sampai dengan turunan ke-*k* pada seluruh domain (Lancaster dan Salkauskas, 1981).

Weight function $w_I(\mathbf{x})$ pada nodal *I* didefinisikan sebagai fungsi dari jarak antara **x** dan $\mathbf{x}_\mathrm{I}$, $w_I(x) = w\left(\|x_I - x\|\right)$. Nilai *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ tidak nol dalam domain yang disebut sebagai *support* (domain *of influence*) dari *weight function*, namun nilai *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ sama dengan nol di luar *support*. Mengingat kaitannya dengan $w_I(\mathbf{x})$, kondisi di mana $\phi_I(\mathbf{x}) = 0$ untuk **x** yang tidak terletak pada *suppor*t dari nodal *I* tersebut, menunjukkan karakter lokal dari aproksimasi *MLS*.

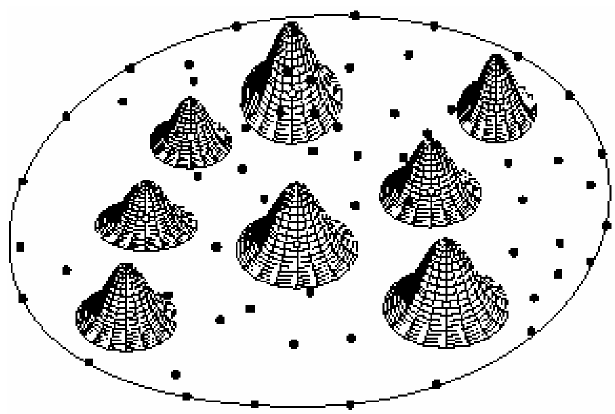
Bentuk subdomain (*support*) yang umum dipakai adalah lingkaran (dengan pusat di *I* dan berjari-jari r_I) untuk struktur dua dimensi (Gambar 2.7) dan bola pada struktur tiga dimensi. Selain itu juga dapat dipakai bentuk *support* lain seperti segi empat dan elips untuk struktur dua dimensi.



Gambar 2.7 Suatu Domain Global (Ω) dengan *Domain of Influence* (Ω_I) yang Berbentuk Lingkaran untuk Setiap Titik Nodal *I*

Dalam memilih suatu *weight function* w_I, boleh dipilih secara sembarang selama *weight function* w_I tersebut bernilai positif dan kontinu sampai pada turunan yang diinginkan. Selain itu *weight function* juga harus dapat memberi solusi $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ yang unik. Karenanya, $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ harus merupakan matriks yang memiliki invers. Nilai suatu *weight function* w_I pada $\mathbf{x}_I$ harus mengecil seiring dengan bertambah jauhnya jarak dari **x** ke titik nodal $\mathbf{x}_I$. Dalam menentukan *support (radius of influence)* dari *weight function* w_I yang terkait dengan nodal I, perlu diperhatikan kondisi-kondisi berikut:

- Jari-jari dari *support*, r_I, harus cukup besar agar jumlah titik nodal yang di lingkupi *domain of definition* dari setiap titik sample **x** memenuhi persyaratan ($n \geq m$), agar didapatkan matriks **A** yang *non-singular*.
- Jari-jari dari *support*, r_I, juga harus cukup kecil untuk mempertahankan karakter lokal dari aproksimasi *MLS*, namun tidak terlalu kecil karena berisiko menyebabkan *numerical error* pada penggunaan kuadratur *Gauss* untuk integrasi numerik, seperti dikemukakan oleh S. N. Atluri dan T. Zhu (1998).



Gambar 2.8 Ilustrasi Bentuk *Weight Function* secara Umum
(Atluri dan Zhu, 1998)

Untuk mengerjakan aproksimasi *MLS* dari *local symmetric weak form,* bentuk persamaan *weight function* harus dipilih terlebih dahulu. Bentuk persamaan *weight function* dapat dipilih sesuai kebutuhan, selama tetap bernilai positif dan kontinu sampai dengan turunan yang diinginkan (ilustrasi pada Gambar 2.8). Beberapa persamaan *weight function* yang dipakai dalam analisis metode *meshless* secara umum adalah sebagai berikut:

- *Gaussian* (*Exponential*) *weight function*:

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{e^{-(d_I/c_I)^{2k}} - e^{-(r_I/c_I)^{2k}}}{(1 - e^{-(r_I/c_I)^{2k}})}, & d_I \leq r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \tag{2.17}$$

dengan c_I merupakan konstanta yang mengontrol bentuk dari *weight function* w_I dan bobot relatifnya, dan k = 1;

- *Cubic Spline weight function*:

$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} \dfrac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3, & s \le \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \dfrac{4}{3}s^3, & \dfrac{1}{2} \le s \le 1, \qquad s = d_I/r_I; \\ 0, & s > 1, \end{cases} \tag{2.18}$$

- *Quartic Spline weight function*:

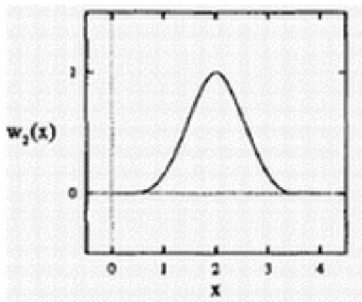
$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6\left(\dfrac{d_I}{r_I}\right)^2 + 8\left(\dfrac{d_I}{r_I}\right)^3 - 3\left(\dfrac{d_I}{r_I}\right)^4, & d_I \le r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \tag{2.19}$$

- *Conical weight function*:

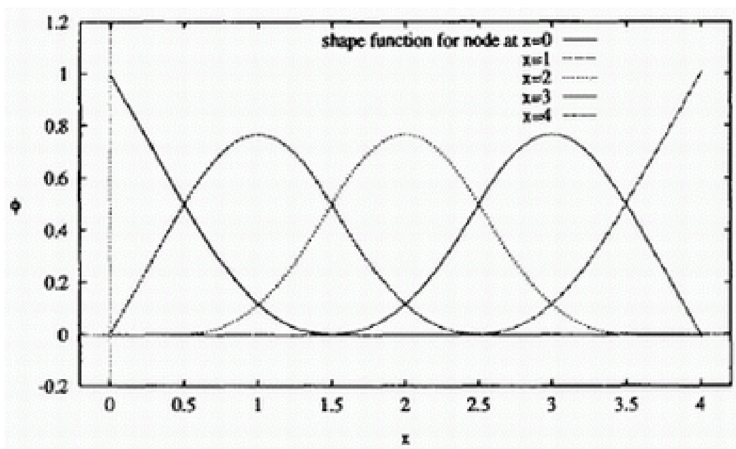
$$w_I(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - (d_I/r_I)^{2k}, & d_I \le r_I, \\ 0, & d_I > r_I, \end{cases} \tag{2.20}$$

di mana $d_I = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|$, r_I adalah jari-jari dari *support* untuk *weight function* $w_I(\mathbf{x})$ yang menentukan *support* dari nodal $\mathbf{x}_I$.

Gambar 2.9 menunjukkan contoh *weight function* yang memiliki *support* (tertentu). *Shape function* yang berkaitan dengan *weight function* tersebut ditunjukkan pada Gambar 2.10, di mana dapat dilihat bahwa $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$. Variabel $\phi_I(\mathbf{x}_J)$ adalah *shape function* dari nodal I yang dievaluasi pada titik nodal $\mathbf{x}_J$, dan δ_{IJ} adalah *Kronecker delta property* (di mana $\delta_{IJ} = 1$ jika $I = J$, namun $\delta_{IJ} = 0$ jika $I \neq J$). Besarnya nilai *shape function* pada titik nodal yang ditinjau ditambahkan dengan nilai *shape function* titik-titik nodal lain yang berada pada titik nodal yang ditinjau sama dengan satu. Hal ini berarti nilai *shape function* tidak sama dengan satu pada titik nodal yang ditinjau dan tidak sama dengan nol di titik nodal yang lain, sehingga nilai yang dihasilkan dari sistem persamaan, $\hat{\mathbf{u}}$, merupakan nilai nodal fiktif. Nilai nodal sesungguhnya dari suatu titik akan didapatkan dengan menambahkan seluruh pengaruh dari titik nodal lain dengan *shape function* yang tidak nol di titik yang ditinjau.



Gambar 2.9 Contoh *Spline Weight Function* dengan $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = \lfloor 1, x \rfloor$ (Beissel, 1996)



Gambar 2.10 Contoh *Shape Function* dengan Penggunaan *Spline Weight Function* pada Gambar 2.9 (Beissel, 1996)

2.3 Kuadratur *Gauss*.

Kuadratur adalah nama metode untuk mengevaluasi sebuah integral secara numerik, untuk menggantikan perhitungan secara analitis yang dikerjakan dalam tabel integral. Ada banyak aturan kuadratur, seperti aturan *Newton-Coles* yang terdiri dari aturan *Simpson*. Yang dibahas disini adalah aturan *Gauss*, karena paling cocok untuk elemen plat yang dipelajari.

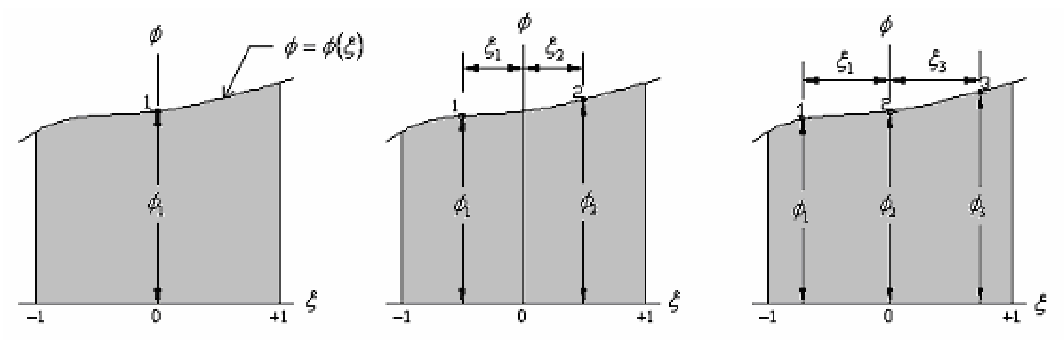
2.3.1 Problem Satu Dimensi.

Sebuah integral mempunyai limit-limit batas yang dapat ditransformasikan menjadi limit-limit batas dari -1 sampai +1. Dengan $f = f(x)$ dan dengan substitusi $x = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2$, persamaan :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f \; dx \text{ menjadi } I = \int_{-1}^{1} \phi \; d\xi \qquad (2.21)$$

Integral ini berubah dari $f = f(x)$ menjadi $\phi = \phi(\xi)$, dimana ξ adalah koordinat *sampling point* (gambar 2.11) dan ϕ mengandung Jacobian (J) dari transformasi, $J = dx/d\xi = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Untuk mengaproksimasi integral dengan cara yang paling sederhana, dapat dilakukan dengan mengevaluasi ϕ pada titik tengah $\xi = 0$ dan mengalikan dengan panjang interval (Gambar 2.11). Kemudian area yang diarsir diaproksimasikan dalam area segiempat dengan tinggi ϕ_1 dan panjang 2, sehingga didapat $I \approx 2\phi_1$. Hasilnya eksak jika $\phi = \phi(\xi)$ dapat mendiskripsikan sebuah garis lurus dari semua *finite slope*.



Gambar 2.11 Kuadratur *Gauss* untuk Menghitung Area yang Diarsir di bawah Kurva $\phi = \phi(\xi)$ dengan (a) Satu, (b) Dua, (c) Tiga S*ampling Points* (Disebut juga *Gauss Points*)

Maka dari itu didapatkan formula kuadratur:

$$I = \int_{-1}^{1} \phi \; d\xi \approx W_1 \; \phi_1 + W_2 \; \phi_2 + \ldots + W_n \; \phi_n \qquad (2.22)$$

Kemudian, untuk mengaproksimasikan nilai I, $\phi = \phi(\xi)$ dievaluasi pada setiap lokasi ξ_i untuk menghitung ordinat ϕ_i, lalu mengalikan setiap ϕ_i dengan *weight* W_i. *Gauss* dapat menentukan lokasi ξ_i dan *weight* W_i dengan akurasi yang tinggi untuk setiap nilai n titik.

Sampling points ditempatkan secara simetris terhadap pusat interval integrasi. Sepasang titik yang simetris tersebut mempunyai nilai *weight* W_i yang sama (seperti yang dilihat pada tabel 2.1). Data-data ini disebut juga koefisien-koefisien *Gauss-Legendre* karena lokasi *sampling points* adalah akar-akar dari polinomial *Legendre*.

Tabel 2.1 *Sampling Points (ξ)* dan *Weights* (W) untuk Kuadratur *Gauss* 1 Dimensi dalam Interval ξ = -1 sampai ξ = +1

n	ξ	*weight*
1	0	2
2	± 0,5774	1
3	± 0,7746 0	0,5556 0,8889
4	± 0,8611 ± 0,3400	0,3479 0,6521
15	± 0,9880 ± 0,9373 ± 0,8482 ± 0,7244 ± 0,5710 ± 0,3942 ± 0,2012 0	0,0308 0,0704 0,1072 0,1396 0,1663 0,1862 0,1984 0,2026

2.3.2 Problem Dua Dimensi untuk Segiempat Aturan 3 x 3 Titik

Aturan *Gauss* multidimensional, yang disebut aturan produk *Gaussian*, dibentuk dari aplikasi aturan *Gauss* 1 dimensi. Dalam 2 dimensi, mengingat fungsi $\phi = \phi(\xi, \eta)$, integrasi dilakukan pertama kali terhadap ξ, kemudian terhadap η.

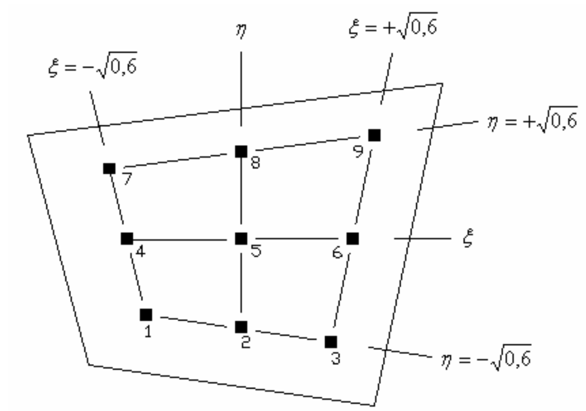
$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \phi(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta \approx \int_{-1}^{1}\left[\sum_i W_i\ \phi(\xi_i,\eta)\right] d\eta$$

$$\approx \sum_j W_j \left[\sum_i W_i \ \phi(\xi_i, \eta_j) \right] = \sum_i \sum_j W_i \ W_j \ \phi(\xi_i, \eta_j) \tag{2.23}$$

Untuk segiempat aturan 3 x 3 titik, seperti dilihat pada Gambar 2.12, persamaan (2.23) menjadi :

$$I \approx 0{,}3086 \ (\phi_1 + \phi_3 + \phi_7 + \phi_9) + 0{,}4938 \ (\phi_2 + \phi_4 + \phi_6 + \phi_8) + 0{,}7901 \ \phi_5 \tag{2.24}$$

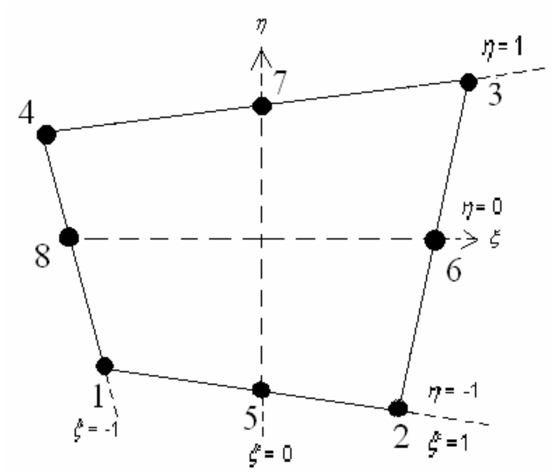
dimana ϕ_i adalah nilai numerik dari ϕ pada titik *Gaus*s ke-i.



Gambar 2.12 Lokasi Titik-titik Kuadratur *Gauss* pada Elemen Segiempat dengan Menggunakan Aturan 3 x 3 Titik

Tabel 2.2 *Sampling Points* (ξ, η) dan *Weights* untuk Kuadratur *Gauss* untuk Segiempat Aturan 3 x 3 Titik dalam Interval ξ = -1 sampai ξ = +1 dan η = -1 sampai η = +1

ξ	η	weight
-0,7746	-0,7746	0,3086
0,0000	-0,7746	0,4938
0,7746	-0,7746	0,3086
-0,7746	0,0000	0,4938
0,0000	0,0000	0,7901
0,7746	0,0000	0,4938
-0,7746	0,7746	0,3086
0,0000	0,7746	0,4938
0,7746	0,7746	0,3086



Gambar 2.13 Titik-titik Batas Partisi (xp) Quadrilateral 8 Titik

Shape function (N) dan turunan *shape function* (DN) dari setiap titik-titik batas partisi segiempat (xp) (8 titik) sebagai berikut :

$N5 = 0,5 \,.\, (1-\xi^2) \,.\, (1-\eta)$ (2.25a)

$N6 = 0,5 \,.\, (1+\xi) \,.\, (1-\eta^2)$ (2.25b)

$N7 = 0,5 \,.\, (1-\xi^2) \,.\, (1+\eta)$ (2.25c)

$N8 = 0,5 \,.\, (1-\xi) \,.\, (1-\eta^2)$ (2.25d)

$N1 = 0,25 \,.\, (1-\xi) \,.\, (1-\eta)-0,5 \,.\, (N8+N5)$ (2.25e)

$N2 = 0,25 \,.\, (1+\xi) \,.\, (1-\eta)-0,5 \,.\, (N5+N6)$ (2.25f)

$N3 = 0,25 \,.\, (1+\xi) \,.\, (1+\eta)-0,5 \,.\, (N6+N7)$ (2.25g)

$N4 = 0,25 \,.\, (1-\xi) \,.\, (1+\eta)-0,5 \,.\, (N7+N8)$ (2.25h)

$$N = \begin{bmatrix} N1 & N2 & N3 & N4 & N5 & N6 & N7 & N8 \end{bmatrix} \qquad (2.26)$$

$$\begin{bmatrix} N_{1,\xi} \\ N_{1,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(-1+\eta)+\frac{1}{2}(\xi\ \ (1-\eta)+\frac{1}{2}(1-\eta^2)) \\ \frac{1}{4}(-1+\xi)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-\xi^2)+(1-\xi)\ \ \eta) \end{bmatrix} \qquad (2.27a)$$

$$\begin{bmatrix} N_{2,\xi} \\ N_{2,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)}{4}+\frac{1}{2}(\xi\ \ (1-\eta)+\frac{1}{2}(-1+\eta^2)) \\ \frac{1}{4}(-1-\xi)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(1-\xi^2)+(1+\xi)\ \ \eta) \end{bmatrix} \qquad (2.27b)$$

$$\begin{bmatrix} N_{3,\xi} \\ N_{3,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(1+\eta)}{4} + \dfrac{1}{2}(\xi \ \ (1+\eta) + \dfrac{1}{2}(\text{-}1+\eta^2)) \\ \dfrac{(1+\xi)}{4} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}(\text{-}1+\xi^2) + (1+\xi) \ \ \eta) \end{bmatrix} \tag{2.27c}$$

$$\begin{bmatrix} N_{4,\xi} \\ N_{4,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{4}(\text{-}1\text{-}\eta) + \dfrac{1}{2}(\xi \ \ (1+\eta) + \dfrac{1}{2}(1\text{-}\eta^2)) \\ \dfrac{(1\text{-}\xi)}{4} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}(\text{-}1+\xi^2) + (1\text{-}\xi) \ \ \eta) \end{bmatrix} \tag{2.27d}$$

$$\begin{bmatrix} N_{5,\xi} \\ N_{5,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}\xi \ \ (1\text{-}\eta) \\ \dfrac{1}{2}(\text{-}1+\xi^2) \end{bmatrix} \tag{2.27e}$$

$$\begin{bmatrix} N_{6,\xi} \\ N_{6,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(1\text{-}\eta^2) \\ \text{-}(1+\xi) \ \ \eta \end{bmatrix} \tag{2.27f}$$

$$\begin{bmatrix} N_{7,\xi} \\ N_{7,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-}\xi \ \ (1+\eta) \\ \dfrac{1}{2}(1\text{-}\xi^2) \end{bmatrix} \tag{2.27g}$$

$$\begin{bmatrix} N_{8,\xi} \\ N_{8,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2}(\text{-}1+\eta^2) \\ \text{-}(1\text{-}\xi) \ \ \eta \end{bmatrix} \tag{2.27h}$$

$$DN = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \dots & N_{n,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \dots & N_{n,\eta} \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Dengan n adalah jumlah titik batas partisi segiempat.

Kemudian didapat besarnya nilai jacobian dan koordinat titik-titik kuadratur *Gauss* (xip) sebagai berikut :

jacobian = DN x [xp1 xp2 xp3 xp4 xp5 xp6 xp7 xp8]' (2.29)

J = | jacobian | (2.30)

Koordinat xip = (N x [xp1 xp2 xp3 xp4 xp5 xp6 xp7 xp8]')' (2.31)

2.3.3 Segitiga Aturan 7 Titik dengan Menggunakan Area Koordinat

Prosedur formulasi yang digunakan untuk elemen isoparametrik triangular secara esensial hampir sama dengan yang digunakan untuk elemen isoparametrik quadrilateral.

ϕ adalah skalar, yang diinterpolasi dari nilai-nilai nodal ϕ_i. Demikian pula, *x* dan *y* adalah koordinat yang diinterpolasi dari nilai nodal x_i dan y_i.

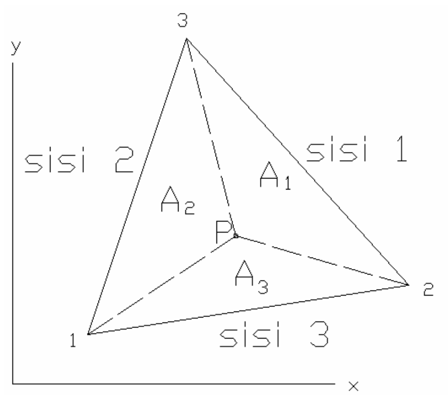
$$\phi = \sum N_i \phi_i \tag{2.32a}$$

$$x = \sum N_i x_i \tag{2.32b}$$

$$y = \sum N_i y_i \tag{2.32c}$$

Elemen tersebut adalah isoparametrik jika *shape function* N_i yang sama digunakan dalam ketiga rumusan di atas. Untuk segitiga, N_i diekspresikan oleh area koordinat ξ_1, ξ_2, dan ξ_3.

Dalam gambar 2.14, sebuah titik P membagi sebuah segitiga 1-2-3 menjadi tiga subarea A_1, A_2, A_3.



Gambar 2.14 Area Koordinat untuk Segitiga

Area koordinat didefinisikan sebagai rasio dari area :

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \qquad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \qquad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{2.33}$$

Dimana A adalah area dari segitiga 1-2-3. Oleh karena $A = A_1 + A_2 + A_3$ dan ξ_i tidak berdiri sendiri-sendiri, maka dari itu harus memenuhi persamaan batas (*constraint equation*) sebagai berikut :

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{2.34a}$$

Titik tengah dari segitiga yang mempunyai ketiga sisi berupa garis lurus terletak pada :

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \frac{1}{3} = 0{,}3333 \tag{2.34b}$$

Oleh karena regangan pada elemen didapat dari turunan terhadap koordinat kartesius, maka dibuat sebuah hubungan antara area koordinat dan koordinat x dan y, sehingga didapatkan persamaan :

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \tag{2.35a}$$

$$y = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \tag{2.35b}$$

Untuk menentukan lokasi sebuah titik hanya dibutuhkan dua area koordinat. Contohnya, jika ξ_1 dan ξ_2 diketahui, persamaan (2.32a, b, c) dapat diselesaikan. Oleh karena itu area koordinat ξ_1, ξ_2, dan ξ_3 dapat dituliskan juga sebagai berikut :

$$\xi_1 = \xi \tag{2.36a}$$

$$\xi_2 = \eta \tag{2.36b}$$

$$\xi_3 = 1 - \xi - \eta \tag{2.36c}$$

Untuk mengevaluasi turunan *shape function*, disusunlah suatu perumusan :

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \tag{2.37}$$

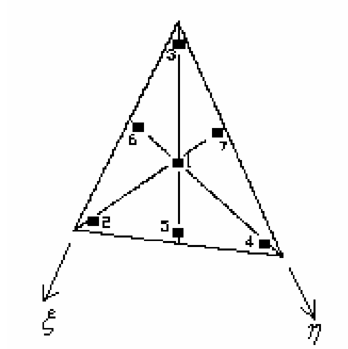
atau

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} - \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \tag{2.38}$$

Kemudian dibentuklah matriks turunan *shape function* sebagai berikut :

$$DN = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & \ldots & N_{n,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & \ldots & N_{n,\eta} \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

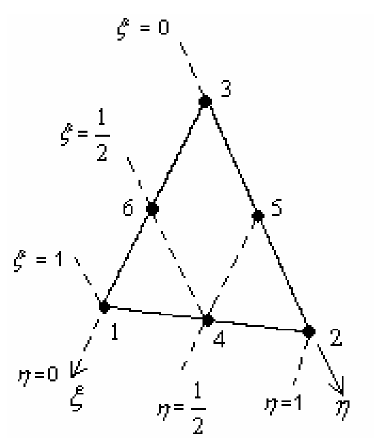
dengan n adalah jumlah titik batas partisi segitiga.



Gambar 2.15 Lokasi Titik-titik Kuadratur *Gauss* pada Elemen Segitiga dengan Menggunakan Aturan 7 Titik

Tabel 2.3 *Sampling Points (* ξ *,* η *, dan (1-* ξ *-* η *))* dan *Weights* untuk Kuadratur *Gauss* untuk Segitiga Aturan 7 Titik dalam Interval ξ = 0 sampai ξ = +1 dan η = 0 sampai η = +1

ξ	η	1-ξ-η	*weight*
0,3333	0,3333	0,3333	0,2250
0,7974	0,1013	0,1013	0,1259
0,1013	0,1013	0,7974	0,1259
0,1013	0,7974	0,1013	0,1259
0,4701	0,4701	0,0597	0,1324
0,4701	0,0597	0,4701	0,1324
0,0597	0,4701	0,4701	0,1324



Gambar 2.16 Titik-titik Batas Partisi (xp) Triangular 6 Titik

Shape function (N) dan turunan *shape function* (DN) dari setiap titik-titik batas partisi segitiga (xp) (6 titik) sebagai berikut :

$$N4 = 4 \,.\, \xi \,.\, \eta \tag{2.40a}$$

$$N5 = 4 \,.\, \eta \,.\, (1-\xi-\eta) \tag{2.40b}$$

$$N6 = 4 \,.\, \xi \,.\, (1-\xi-\eta) \tag{2.40c}$$

$$N1 = \xi \,.\, (-0{,}5 \,.\, N4 \,.\, N5) \tag{2.40d}$$

$$N2 = \eta \,.\, (-0{,}5 \,.\, N5 \,.\, N6) \tag{2.40e}$$

$$N3 = (1-\xi-\eta) \,.\, (-0{,}5 \,.\, N4 \,.\, N6) \tag{2.40f}$$

$$N = \begin{bmatrix} N1 & N2 & N3 & N4 & N5 & N6 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$DN = \begin{bmatrix} 4\xi - 1 & 0 & -4(1-\xi-\eta)+1 & 4\eta & -4\eta & 4((1-\xi-\eta)-\xi) \\ 0 & 4\eta - 1 & -4(1-\xi-\eta)+1 & 4\xi & 4((1-\xi-\eta)-\eta) & -4\xi \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Nilai jacobian dihasilkan dengan mengalikan turunan *shape function* (DN) dengan koordinat titik-titik batas partisi (xp).

$$\text{jacobian} = \text{DN x xp} \tag{2.43}$$

$$\text{J} = |\text{ jacobian }| \tag{2.44}$$

Integrasi numerik untuk segitiga, dengan ϕ adalah fungsi dari area koordinat ξ, η, dan $(1-\xi-\eta)$, aturan kuadraturnya adalah sebagai berikut :

$$\int_A \phi \; dA = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} W_i J_i \phi_i \tag{2.45}$$

Dimana ϕ_i adalah nilai dari ϕ pada titik tertentu pada segitiga., W_i adalah *weight* dari titik tersebut, dan n adalah jumlah *sampling points* yang digunakan.

2.4 Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin* (*MLPG*)

Metode *meshless local Petrov-Galerkin* (*MLPG*) dapat dikatakan metode yang "*truly meshless",* karena bantuan penggunaan *mesh* dasar memang tidak diperlukan untuk menginterpolasi variabel yang dihasilkan ataupun mengintegrasi. Semua integral dapat dievaluasi langsung di dalam subdomain lokal Ω_I^{te} dan *boundary* subdomain lokal $\partial\Omega_I^{te}$ dengan bentuk yang teratur, yang biasanya berbentuk lingkaran untuk problem 2 dimensi (atau dapat pula memakai bentuk-bentuk teratur lainnya) dan berpusat di setiap titik evaluasi. Metode *MLP*G yang diperkenalkan oleh Zhu dan Atluri (1998), menggunakan *local symmetric weak form* (*LSWF*) dan *shape function* dari aproksimasi *moving least-squares* (*MLS*).

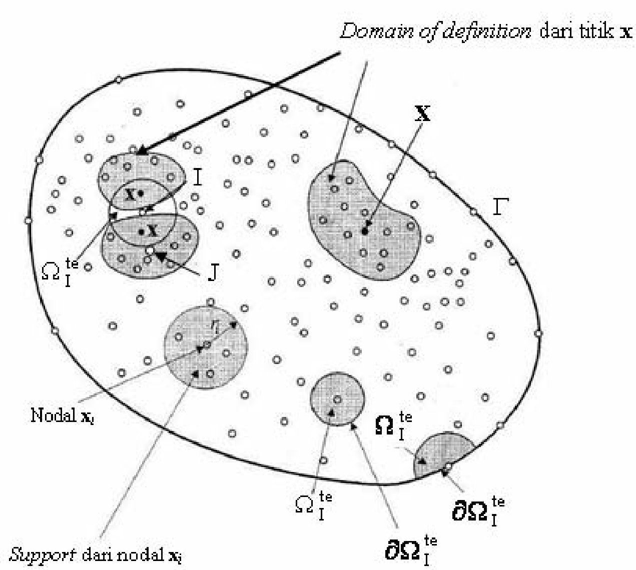
Kondisi batas esensial yang belum dapat langsung terpenuhi (yaitu u_i = $\bar{u}_i$ pada Γ_u) dengan aproksimasi *MLS* perlu dimasukkan pengaruhnya dengan bantuan metode *penalty*. Nilai *displacement* yang didapatkan dari hasil penyelesaian persamaan diskret ($\hat{u}$) merupakan *displacement* fiktif. Hal ini dikarenakan *shape function* dari aproksimasi *MLS* tidak memiliki *Kronecker delta property*, yakni $\phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ}$ (di mana $\delta_{IJ} = 1$ jika $I = J$, namun $\delta_{IJ} = 0$ jika $I \neq J$) atau dengan kata lain nilai *shape function* $\phi_I(\mathbf{x}_J)$ tidak satu di titik nodal yang ditinjau dan tidak bernilai nol di titik nodal yang lain.

Pada metode *MLPG* ini digunakan metode *Petrov-Galerkin*, yang dapat memakai fungsi aproksimasi dengan menentukan *trial function* dan *test function*, misalnya $\phi_J(x)$ ditentukan dari fungsi aproksimasi *MLS* dan $\Psi_I(x)$ untuk nodal *I* diambil dari *weight function* yang dipakai pada aproksimasi *MLS*, namun tidak harus demikian, misalnya $\Psi_I(x)$ untuk nodal *I* tidak diambil dari *weight function* yang dipakai pada aproksimasi *MLS*, tetapi dipakai *weight function* yang berbeda dari *weight function* yang dipakai pada aproksimasi *MLS*.

Weak form pada metode *MLPG* tidak langsung dipenuhi secara global pada seluruh domain Ω, melainkan dikerjakan dahulu dalam subdomain-subdomain lokal, dimana union dari subdomain-subdomain lokal tersebut mencakup domain global Ω. Untuk memperjelas uraian di atas dapat dilihat pada gambar 2.17, antara lain:

- *Support* dari nodal $\mathbf{x}_I$ menunjukkan suatu subdomain lokal (biasanya dipakai bentuk lingkaran berjari-jari r_I) di mana *weight function* w_I pada aproksimasi *MLS*, terkait dengan nodal $\mathbf{x}_I$, masih memiliki nilai (tidak nol).

- *Domain of definition* dari titik **x** (untuk aproksimasi *MLS*) menunjukkan suatu subdomain yang melingkupi titik-titik nodal dengan *weight function* yang tidak nol di **x** ($w_I(\mathbf{x}) \neq 0$, I = 1,2,…,n).



Gambar 2.17 Ilustrasi Subdomain yang Digunakan pada Metode *MLPG*

2.4.1 *Local Symmetric Weak Form* (*LSWF*)

Untuk problem 2 dimensi, nilai batas elastis domain global Ω yang dibatasi oleh *boundary* global Γ, persamaan kesetimbangan gayanya dapat dituliskan sebagai berikut :

$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$ pada Ω (2.46a)

Sedangkan pada kondisi batas Γ dapat dituliskan sebagai berikut :

$u_i = \bar{u}_i$ pada Γ_u, dan (2.46b)

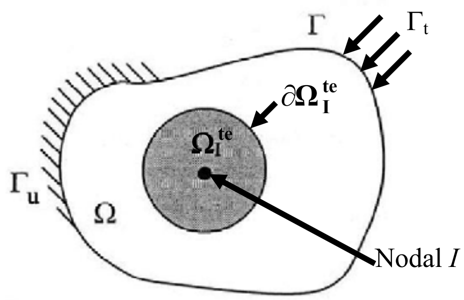
$\sigma_{ij}\, n_j = \bar{t}_i$ pada Γ_t (2.46c)

Dimana $\bar{u}_i$ dan $\bar{t}_i$ berturut-turut adalah *prescribed displacement* dan *prescribed* gaya pada *boundary* perletakkan Γ_u dan *boundary* gaya Γ_t, dan n_j adalah vektor normal yang arahnya keluar pada *boundary* Γ.

Pada persamaan *local symetric weak form* (*LSWF*), dimulai dengan menggunakan sebuah *weak form* pada subdomain lokal Ω_I^{te} dan aproksimasi *MLS* untuk membentuk metode yang "*trully meshless*" (*MLPG*), dimana subdomain lokal Ω_I^{te} berada di dalam domain global Ω ($\Omega_I^{te} \in \Omega$ **).** Bentuk dari *local weak form weighted residual* secara umum dari persamaan kesetimbangan gaya dan kondisi batas (persamaan 2.46) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\int_{\Omega_I^{te}} (\sigma_{ij,j} + F_i)\, v_i\, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} (u_i - \overline{u}_i)\, v_i\, d\Gamma = 0, \quad (2.47)$$

Dimana Γ_I^{su} adalah perpotongan dari *boundary* perletakkan Γ_u dengan subdomain lokal Ω_I^{te} (keterangan mengenai *boundary* dapat dilihat lebih jelas pada gambar 2.18), u_i dan v_i berturut-turut adalah *trial function* dan *test function*, dan α adalah bilangan penalti (α>>1). Ω_I^{te} melambangkan subdomain lokal yang berpusat di titik nodal *I*, dimana nilai *test-shape function* nodal tersebut tidak nol, seperti diilustrasikan pada Gambar 2.18.

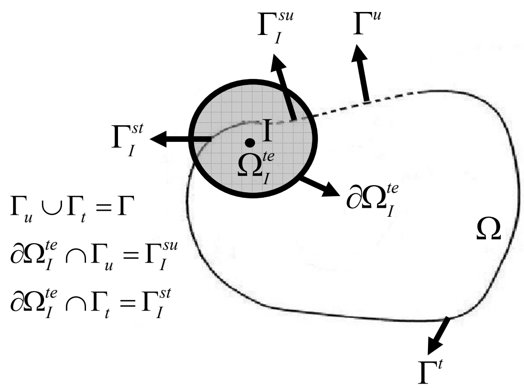


Gambar 2.18 Ilustrasi dari Subdomain Lokal Ω_I^{te} dengan Pusat *I* dan *Boundary* Subdomain Lokal $\partial\Omega_I^{te}$, serta Ω adalah Domain Global dengan *Boundary* Γ, dengan Γ_u adalah *Dirichlet Boundary* dan Γ_t adalah *Neumann Boundary*

Dengan prinsip diferensiasi dan teorema divergensi *Gauss*, bentuk persamaan (2.47) dapat diubah menjadi :

$$\int_{\partial\Omega_I^{te}} \sigma_{ij}\, n_j\, v_i\, d\Gamma - \int_{\Omega_I^{te}} (\sigma_{ij}\, v_{i,j} - b_i\, v_i)\, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} (u_i - \overline{u}_i)\, v_i\, d\Gamma = 0, \quad (2.48)$$

Dimana n_j adalah satuan normal keluar terhadap *boundary* subdomain lokal $\partial\Omega_I^{te}$.



Gambar 2.19 Perpotongan antara Suatu Subdomain Lokal Ω_I^{te} dengan *Boundar*y Perletakkan Γ_u Dinamakan Γ_{su}, dan dengan *Boundar*y Gaya Γ_t Dinamakan Γ_{st}

Mengingat *test function* $v_i = 0$ pada *boundary* subdomain lokal $\partial\Omega_I^{te}$, kecuali jika *boundary* subdomain lokal $\partial\Omega_I^{te}$ berpotongan dengan *boundary* global Γ, maka persamaan (2.48) dapat disederhanakan menjadi :

$$\int_{\Gamma_I^{su}} \sigma_{ij}\, n_j\, v_i\, d\Gamma + \int_{\Gamma_I^{st}} \sigma_{ij}\, n_j\, v_i\, d\Gamma - \int_{\Omega_I^{te}} \sigma_{ij}\, v_{i,j}\, d\Omega + \int_{\Omega_I^{te}} F_i\, v_i\, d\Omega - \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} (u_i - \overline{u}_i) v_i\, d\Gamma = 0 \tag{2.49}$$

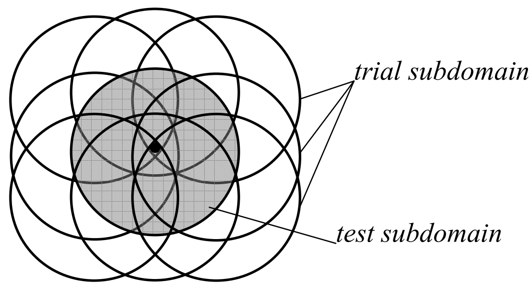
Pada akhirnya persamaan (2.49) dapat dituliskan dengan bentuk :

$$\int_{\Omega_I^{te}} \sigma_{ij}\, v_{i,j}\, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} u_i\, v_i\, d\Gamma - \int_{\Gamma_I^{su}} t_i\, v_i\, d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_I^{st}} \bar{t}_i\, v_i\, d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \overline{u}_i\, v_i\, d\Gamma + \int_{\Omega_I^{te}} F_i\, v_i\, d\Omega, \tag{2.50}$$

Di mana $t_i = \sigma_{ij}.n_j$, dan Γ_I^{st} adalah perpotongan dari *boundary* gaya Γ_t dan subdomain lokal Ω_I^{te} (dapat lihat pada Gambar 2.19). Dari bentuk persamaan *local symetric weak form* (persamaan (2.50)) di awal nampak bahwa σ_{ij} merupakan turunan pertama dari *trial function u*, begitu pula dengan $v_{i,\,j}$ yang berarti turunan pertama dari *test function v*. Kondisi inilah yang menunjukkan makna "*symmetric*" dalam istilah "*local symmetric weak form*", dan dikerjakan dalam area subdomain sehingga bersifat lokal. Jika lokasi subdomain lokal Ω_I^{te} seluruhnya berada di dalam domain global Ω, tidak ada perpotongan antara *boundary* lokal $\partial\Omega_I^{te}$ dan *boundary* global Γ, sehingga bentuk integral pada Γ_I^{su}

dan Γ_I^{st} hilang. Persamaan (2.50) menyatakan baris ke-*I* di dalam matriks kekakuan global, sedangkan isi dari kolom ke-*J* berkaitan dengan semua titik nodal yang memiliki *domain of influence*, Ω_J^{tr}, yang berpotongan dengan subdomain *test function* ke-*I*, Ω_I^{te}, seperti dapat dilihat pada Gambar 2.20.



Gambar 2.20 Perpotongan Ω_I^{te} dengan Seluruh Ω_J^{tr} yang Memiliki Kontribusi (Komponen yang Tidak Nol) kepada Matriks Kekakuan Struktur Baris ke-*I*

2.4.2 Diskretisasi dan Integrasi pada Metode *Meshless Local Petrov-Galerkin*

Bentuk aproksimasi *trial function* dan *test function* yang dipakai pada metode *MLPG* secara berturut-turut dapat dituliskan sebagai :

$$u^h(\mathbf{x}) = u = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{x})\, \hat{u}_J, \qquad (2.51)$$

$$v^h(\mathbf{x}) = v = \sum_{I=1}^{N} \psi_I(\mathbf{x})\, \hat{v}_I, \qquad (2.52)$$

di mana $\phi_J(\mathbf{x})$ dan $\Psi_I(\mathbf{x})$ masing-masing adalah *nodal shape function* untuk *trial function* dan *test function* dengan pusat di nodal *J* dan *I*. S*hape function* $\phi_J(\mathbf{x})$ dibentuk dari aproksimasi *MLS* dan *weight function* $\Psi_I(\mathbf{x})$ adalah *weight function* yang digunakan dalam aproksimasi *MLS*. Biasanya, bentuk fisik dari *trial function* pada domain dua dimensi menyerupai *bell-shape*, karena nilainya menurun dari puncak secara *smooth* sampai nol pada *boundary* dari *support*. Secara umum dalam aproksimasi pada *meshless*, $\hat{v}_I^i$ dan $\hat{u}_J^i$ merupakan nilai nodal fiktif, bukan nilai sesungguhnya, yaitu u_i.

Substitusi dari persamaan (2.51) dan (2.52) ke *LSWF* pada persamaan (2.50) dan memfaktorkan $\hat{v}_I^i$ (karena terdapat di tiap suku pada persamaan (2.50), serta dapat dipilih secara sembarang) keluar dari persamaan, akan menghasilkan sistem persamaan diskret dari metode *MLPG* sebagai berikut :

$$\sum_{J=1}^{N} \int_{\Omega_I^s} \left(\mathbf{B}_I^v\right)^T \mathbf{E}\, \mathbf{B}_J\, \hat{\mathbf{u}}_J\, d\Omega + \alpha \sum_{J=1}^{N} \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\, \phi_J \hat{\mathbf{u}}_J\, d\Gamma - \sum_{J=1}^{N} \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\, \mathbf{N}\, \mathbf{E}\, \mathbf{B}_J \hat{\mathbf{u}}_J\, d\Gamma$$

$$= \int_{\Gamma_I^{st}} \mathbf{V}_I\ \bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\ \bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma + \int_{\Omega_I^s} \mathbf{V}_I\, \mathbf{F}\, d\Omega, \qquad (2.53)$$

di mana dalam ruang dua dimensi,

$$\mathbf{B}_I^v = \begin{bmatrix} \psi_{I,1} & 0 \\ 0 & \psi_{I,2} \\ \psi_{I,2} & \psi_{I,1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}_J = \begin{bmatrix} \phi_{J,1} & 0 \\ 0 & \phi_{J,2} \\ \phi_{J,2} & \phi_{J,1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{V}_I = \begin{bmatrix} \psi_I & 0 \\ 0 & \psi_I \end{bmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{u}}_J = \begin{Bmatrix} \hat{u}_J^1 \\ \hat{u}_J^2 \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{v}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{v} & 0 \\ \bar{v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\bar{v})/2 \end{bmatrix},$$

dengan $\bar{E} = \begin{cases} E \\ \dfrac{E}{1-\bar{v}^2} \end{cases}$ dan $\bar{v} = \begin{cases} v & \text{untuk kondisi } \textit{plane stress}, \\ \dfrac{v}{1-v} & \text{untuk kondisi } \textit{plane strain}. \end{cases}$

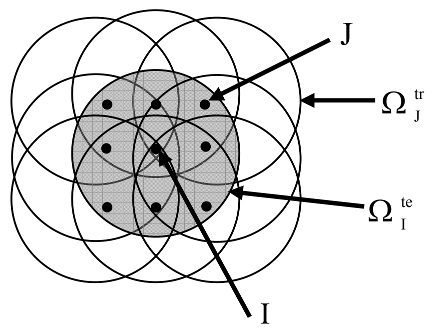
Pada persamaan di atas, (n_1, n_2) adalah vektor normal keluar pada *boundary*, E adalah modulus elastisitas (*Young*), dan v adalah *Poisson's ratio*. Selanjutnya, persamaan (2.53) dapat dituliskan dengan bentuk persamaan yang lebih sederhana, yaitu

$$\sum_{J=1}^{N} \mathbf{K}_{IJ}\, \hat{\mathbf{u}}_J = \mathbf{f}_I, \qquad (2.54)$$

di mana N adalah jumlah semua titik nodal, dan

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega_I^s} \left(\mathbf{B}_I^v\right)^T \mathbf{E}\,\mathbf{B}_J\, d\Omega + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\, \phi_J\, d\Gamma - \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\, \mathbf{N}\,\mathbf{E}\,\mathbf{B}_J\, d\Gamma, \tag{2.55}$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_I^{st}} \mathbf{V}_I\, \bar{\mathbf{t}}\, d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} \mathbf{V}_I\, \bar{\mathbf{u}}\, d\Gamma + \int_{\Omega_I^s} \mathbf{V}_I\, \mathbf{F}\, d\Omega. \tag{2.56}$$



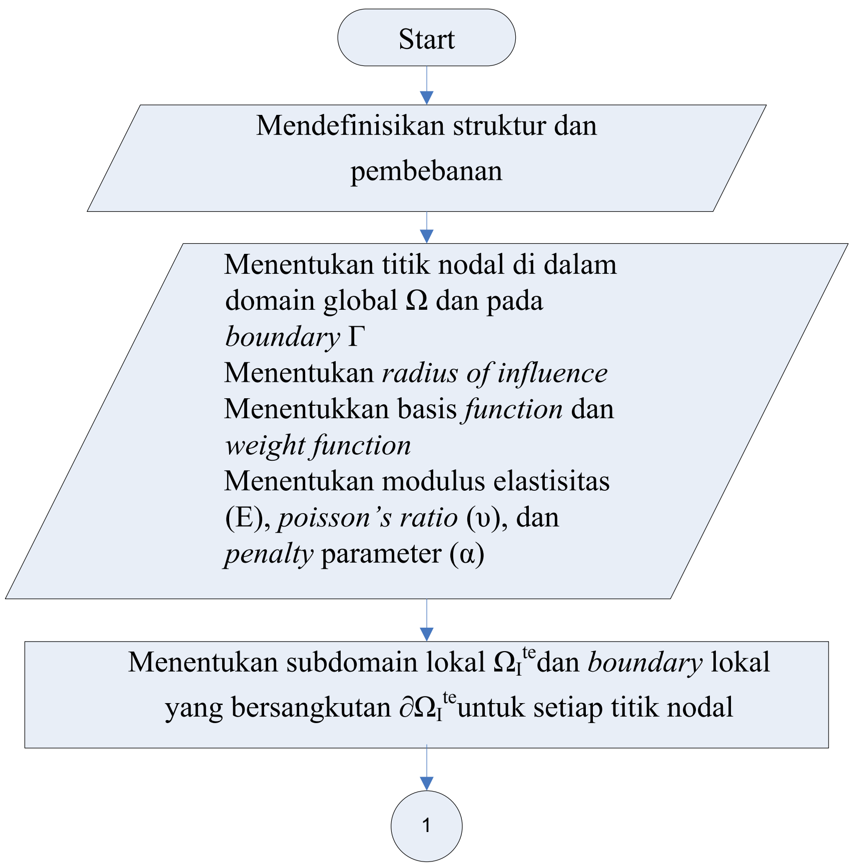
Gambar 2.21 Integrasi Dikerjakan di Dalam Subdomain Lokal Ω_I^{te} untuk Setiap *J* dengan Tujuan Mengevaluasi $\mathbf{K}_{IJ}$

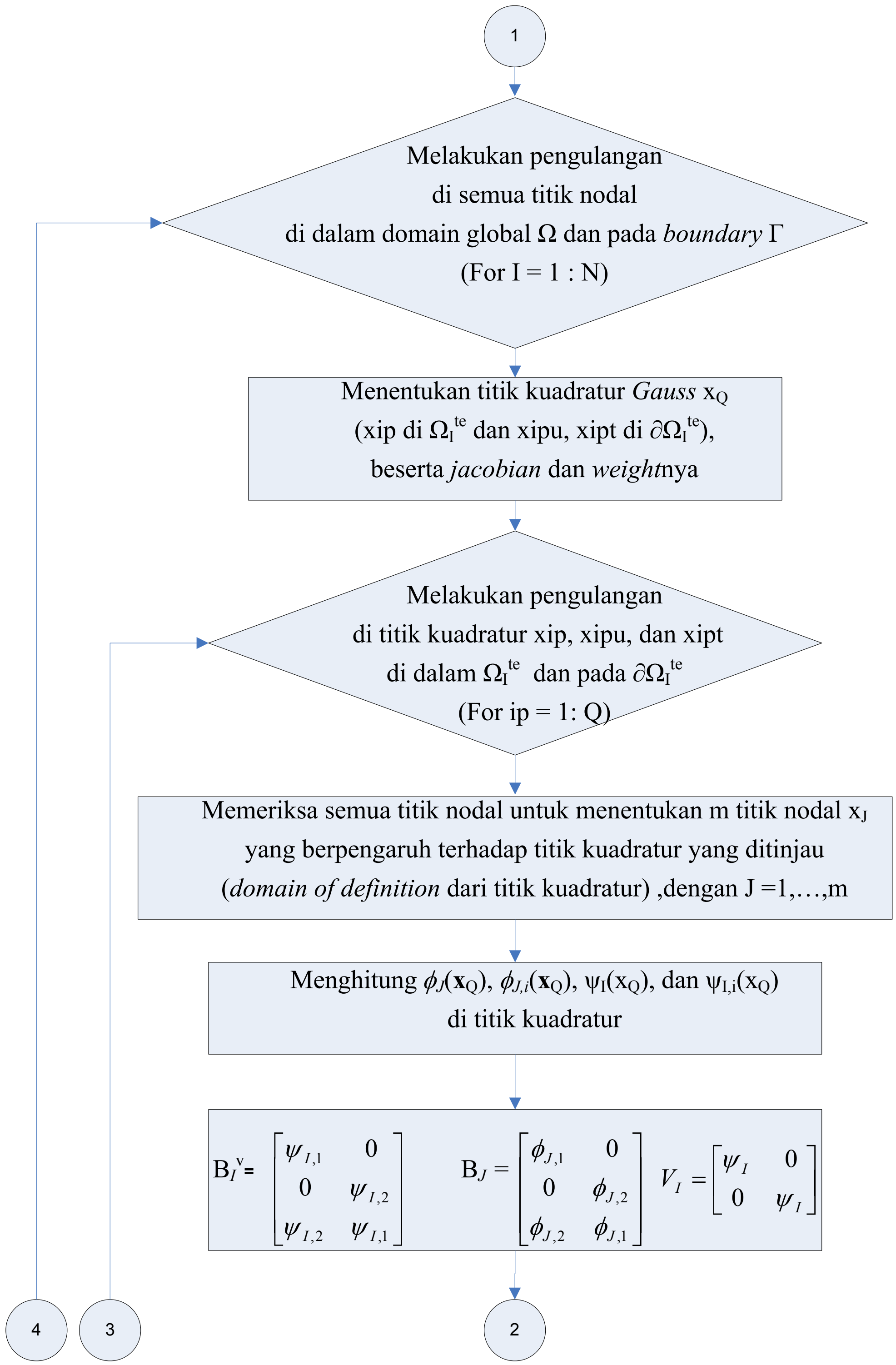
Dalam pengerjaan metode *MLPG*, setiap *local symmetric weak form* (hanya mengevaluasi satu *test function* dan semua *trial function* yang subdomain lokalnya berpotongan dengan subdomain lokal dari *test function*, seperti pada Gambar 2.21) menghasilkan dua baris (khusus untuk problem dua dimensi, karena di setiap titik nodal ada dua *unknown* arah *x* dan *y*) komponen yang tidak nol di dalam matriks kekakuan global. Pada *MLPG*, proses perakitan yang dilakukan adalah merakit komponen dari matriks kekakuan lokal yang tidak nol kedalam matriks kekakuan global berdasarkan urutan titik-titik nodalnya.

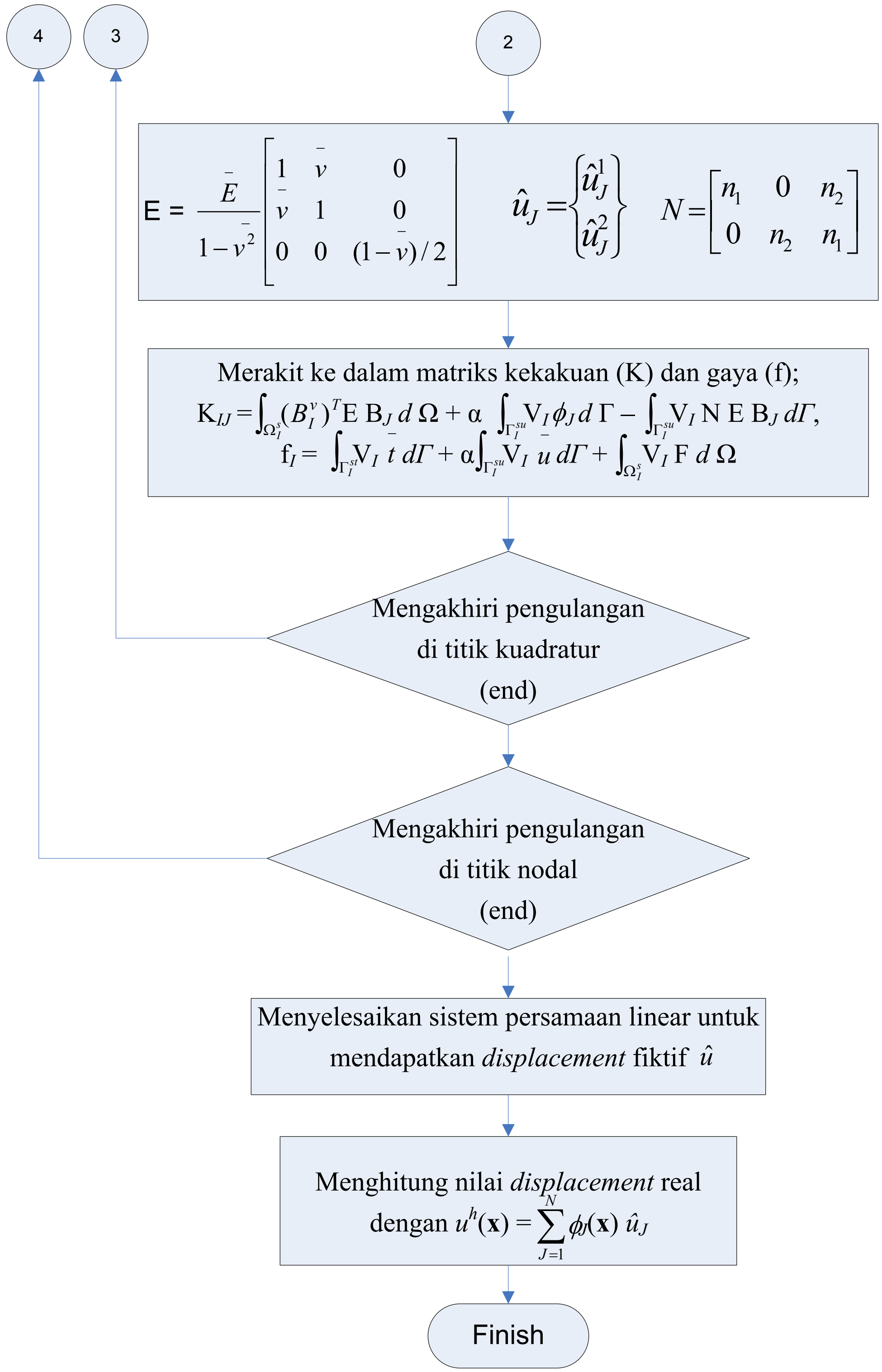
Integral pada persamaan (2.55) dan (2.56) dapat dievaluasi langsung di dalam subdomain lokal Ω_I^{te} (Gambar 2.21) dengan bentuk yang teratur dan berpusat di setiap titik evaluasi, misalnya dengan kuadratur numerik *Gauss-Legendre*. Secara teoritis, jika gabungan dari seluruh subdomain lokal Ω_I^{te} dapat melingkupi domain global, maka persamaan kesetimbangan dan kondisi batas dapat terpenuhi di seluruh domain global Ω dan sepanjang *boundary* Γ (Atluri *et al*., 1999).

Karakteristik dari matriks kekakuan struktur pada metode *MLPG* umumnya tidak simetris, mengingat aproksimasi *test function* dan *trial function* yang digunakan bisa berbeda. Ukuran (jari-jari atau *radius of influece*) dari Ω_I^{te} dan Ω_J^{tr} secara umum juga boleh sembarang, berbeda satu sama lain, ataupun berbeda untuk tiap-tiap I dan J. Namun jika Ω_I^{te} dan Ω_J^{tr} untuk setiap I dan J berjari-jari sama, dan jika u_i dan v_i yang berpusat di nodal ke-I dan ke-J berturut-turut sama untuk setiap I dan J, serta *test function* dan *trial function* yang digunakan sama, maka matriks kekakuan menjadi simetris. Dengan menyelesaikan persamaan (2.54) akan didapatkan nilai *displacement* fiktif $\hat{u}_J$ di setiap titik nodal J. Hasil aproksimasinya dapat diperoleh dari persamaan (2.51), dan turunannya dapat dicari untuk mendapatkan regangan dan tegangan.

2.5 *Flow Chart* Analisis Struktur dengan Metode *MLPG*




1
Melakukan pengulangan di semua titik nodal di dalam domain global Ω dan pada *boundary* Γ (For I = 1 : N)
Menentukan titik kuadratur *Gauss* x_Q (xip di Ω_I^{te} dan xipu, xipt di $\partial\Omega_I^{te}$), beserta *jacobian* dan *weight*nya
Melakukan pengulangan di titik kuadratur xip, xipu, dan xipt di dalam Ω_I^{te} dan pada $\partial\Omega_I^{te}$ (For ip = 1: Q)
Memeriksa semua titik nodal untuk menentukan m titik nodal x_J yang berpengaruh terhadap titik kuadratur yang ditinjau (*domain of definition* dari titik kuadratur) ,dengan J =1,…,m
Menghitung $\phi_J(\mathbf{x}_Q)$, $\phi_{J,i}(\mathbf{x}_Q)$, $\psi_I(x_Q)$, dan $\psi_{I,i}(x_Q)$ di titik kuadratur
$B_I^v = \begin{bmatrix} \psi_{I,1} & 0 \\ 0 & \psi_{I,2} \\ \psi_{I,2} & \psi_{I,1} \end{bmatrix}$ $B_J = \begin{bmatrix} \phi_{J,1} & 0 \\ 0 & \phi_{J,2} \\ \phi_{J,2} & \phi_{J,1} \end{bmatrix}$ $V_I = \begin{bmatrix} \psi_I & 0 \\ 0 & \psi_I \end{bmatrix}$
4
3
2


4
3
2
$E = \dfrac{\bar{E}}{1-\bar{v}^2}\begin{bmatrix} 1 & \bar{v} & 0 \\ \bar{v} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\bar{v})/2 \end{bmatrix}$ $\hat{u}_J = \begin{Bmatrix} \hat{u}_J^1 \\ \hat{u}_J^2 \end{Bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & n_1 \end{bmatrix}$
Merakit ke dalam matriks kekakuan (K) dan gaya (f);
$K_{IJ} = \int_{\Omega_I^s} (B_I^v)^T E\, B_J\, d\,\Omega + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} V_I \phi_J\, d\,\Gamma - \int_{\Gamma_I^{su}} V_I\, N\, E\, B_J\, d\Gamma,$
$f_I = \int_{\Gamma_I^{st}} V_I\, \bar{t}\, d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma_I^{su}} V_I\, \bar{u}\, d\Gamma + \int_{\Omega_I^s} V_I\, F\, d\,\Omega$
Mengakhiri pengulangan
di titik kuadratur
(end)
Mengakhiri pengulangan
di titik nodal
(end)
Menyelesaikan sistem persamaan linear untuk
mendapatkan *displacement* fiktif $\hat{u}$
Menghitung nilai *displacement* real
dengan $u^h(\mathbf{x}) = \sum_{J=1}^{N} \phi_J(\mathbf{x})\, \hat{u}_J$
Finish