

II. TINJAUAN PUSTAKA

1. ANALYTIC HIERARCHY PROCESS

Analytic Hierarchy Process (AHP) telah diterima sebagai model pengambilan keputusan yang bersifat multikriteria, oleh orang-orang akademik maupun praktisi (Saaty, 1990). Kriteria-kriteria dibandingkan dalam bentuk perbandingan berpasangan, untuk membentuk suatu matriks preferensi, demikian pula halnya dengan alternatif-alternatif. Perbandingan berpasangan tersebut digambarkan dalam penjelasan berikut.

Misalkan, antara tiga kriteria C1, C2, dan C3 dibandingkan sebagai berikut dengan menggunakan skala 1 sampai dengan 9 dimana :

- 1 = sama penting (*equal importance*)
- 3 = sedikit lebih penting (*moderate more important*)
- 5 = cukup lebih penting (*essential, strong more importance*)
- 7 = jauh lebih penting (*demonstrated Importance*)
- 9 = mutlak lebih penting (*absolutely more importance*)

2,4,6,8 = nilai-nilai antara yang memberikan kompromi (*grey area*)

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
C1			X															C2

Artinya : kriteria C1 jauh lebih penting dari C2

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
c1													X					c3

	9	8	7	6	5	4	3	2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
c2									x									c3

Artinya : kriteria C2 dan C3 sama penting

Penilaian dari pengambil keputusan di atas, diatur dalam bentuk matriks berbalikan (*reciprocal matrix*) :

$$\begin{array}{c}
 \text{C1} \quad \text{C2} \quad \text{C3} \\
 \mathbf{A} = \begin{array}{l} \text{C1} \\ \text{C2} \\ \text{C3} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 7 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

2. NORMALISASI DALAM AHP

Dalam **AHP** konvensional, normalisasi dilakukan dalam **satu** dimensi. Jika **A** adalah suatu matriks preferensi $n \times n$ yang dibentuk melalui perbandingan berpasangan (*pairwise comparison*) dari n kriteria dan **R** adalah vektor eigen dari **A**, maka

$$\mathbf{AR} = \lambda_{\max} \mathbf{R}$$

R_i adalah elemen dari matriks **R**, maka w_i (prioritas relatif terakhir yang telah dinormalisasi) didapatkan sebagai berikut :

$$w_i = \frac{R_i}{\sum R_i}$$

Sehingga :

$$\sum w_i = 1$$

Validasi dari AHP didasarkan pada normalisasi seperti di atas. Dalam geometrical **AHP** normalisasi dari vektor preferensi didapatkan dengan mengatur norma euclidius dari vektor tersebut menjadi sama dengan satu.

Definisi 1

“Norma Euclidius (panjang Euclidius) dari vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ pada ruang vektor n -dimensi didefinisikan sebagai $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$ (Howard Anton, 1995)”.

Vektor yang dinormalisasi ini dinamakan $\mathbf{v}$ yang mempunyai elemen-elemen v_i sehingga,

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1.$$

Atau

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1.$$

Namun demikian, prioritas relatif dari objek i bukan diberikan oleh v_i , tetapi oleh kuadratnya. Agar konsisten dengan validasi dari AHP, didefinisikan satu operator baru $\mathbf{P}$, yang memenuhi persamaan nilai eigen :

$$\mathbf{P} \mathbf{v} = \lambda_{\max} \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1.$$

Secara sederhana, operator $\mathbf{P}$ didefinisikan dengan mengambil akar kwadrat dari tiap-tiap elemen $\mathbf{A}$. Jika $\mathbf{A}$ konsisten secara penuh maka $\mathbf{P}$ juga konsisten secara penuh, yaitu $CR = 0$ dan untuk keduanya $\lambda_{\max} = n$. Vektor eigen $\mathbf{w}$ dari matriks preferensi $\mathbf{A}$ dinormalisasi dengan mengatur $\sum w_i = 1$, dan vektor eigen $\mathbf{v}$ dari matriks preferensi $\mathbf{P}$ dinormalisasi sehingga $\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1$ atau $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$. Jika $\mathbf{A}$ memenuhi kondisi konsistensi secara penuh, maka

$v_i = \sqrt{w_i}$ atau $v_i^2 = w_i$. Jadi, karena w_i diinterpretasikan sebagai prioritas relatif untuk **A**, maka v_i^2 diinterpretasikan sebagai prioritas relatif untuk **P**. Selanjutnya, akan dibahas secara teliti konsep tersebut dalam teori matriks sederhana dan ruang vektor linear.

Namun demikian, jika matriks tidak konsisten penuh, belum diketahui vektor eigen yang mana yang merepresentasikan realitas yang lebih baik, disini validasi empiris sangat diperlukan. Selain itu, pengukuran-pengukuran seperti *consistency index* (CI) dan *consistency ratio* (CR) akan didapatkan dengan rumus yang sama seperti dalam AHP konvensional (Saaty 1990).

3. AHP DALAM VEKTOR RUANG

Misalkan ruang keputusan didefinisikan oleh n objek. Ruang tersebut adalah ruang vektor linear yang direntang oleh n basis vektor β_i

Definisi 2,

" Jika $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah vektor-vektor pada ruang vektor V dan jika masing-masing vektor V dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \dots, v_n$ maka vektor-vektor ini merentang V jika kombinasi linear dari $v_1, v_2, \dots, v_n$ dikelompokkan maka didapatkan subruang V yang dinamakan ruang vektor linear terentang ."(Howard Anton, **1995**), dan $v_1, v_2, \dots, v_n$ dinamakan basis vektor.

Pilihan dari seorang pengambil keputusan akan diwakili oleh matriks preferensi **P** yang elemennya adalah akar kwadrat dari matriks perbandingan berpasangan dari AHP konvensional.

Seperti disebutkan sebelumnya

$$\mathbf{P} \mathbf{v} = \lambda_{\max} \mathbf{v}$$

dimana $\mathbf{v}$ dinormalisasi dengan membuat normal euclidiusnya sama dengan satu.

$$\mathbf{v}^T \mathbf{v} = 1.$$

Basis vektor dari $\mathbf{v}$ adalah

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \beta_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis vektor tersebut membentuk suatu set yang lengkap dan karena itu segala *state preference* $\mathbf{S}$ bisa diperluas menjadi $\mathbf{S} = \sum c_i \beta_i$. Koefisien c_i diinterpretasikan sebagai *amplitude* dari state $\mathbf{S}$ dalam state β_i

Karena

$$\mathbf{v} = \sum v_i \beta_i \dots \dots \dots (3)$$

maka, elemen-elemen v_i adalah *amplitude* dari state $\mathbf{v}$ dalam state β_i . Jadi v_i bisa diinterpretasikan sebagai koordinat dari $\mathbf{v}$ dalam suatu ruang vektor. Secara alternatif, jika $\mathbf{v}$ dinormalisasi (panjang $\mathbf{v} = 1$), maka v_i juga adalah cosinus dari sudut antara $\mathbf{v}$ dan β_i .

v_i adalah elemen dari $\mathbf{v}$, dan $\mathbf{v}^T = [v_1 \dots v_n]$, dan normalisasinya adalah

$$\sum v_i^2 = 1$$

Basis **vektor** satu dengan yang lain adalah saling tegak lurus, **dan** dinormalisasi satu dengan yang lain sebagai berikut :

$$\beta_i^T \beta_i = 1, \quad \beta_i^T \beta_j = 0 \quad i \neq j$$

jadi,

amplitudo yang berhubungan dengan basis vector ke- $i = \beta_i^T \mathbf{v} = v_i$,

probabilitas = (amplitudo)² = v_i^2

Oleh karena itu v_i^2 diinterpretasikan sebagai prioritas relatif.

Hal ini menunjukkan bahwa ketika seorang pengambil keputusan mengekspresikan pilihan relatifnya dari objek-objek (kriteria-kriteria dan alternatif-alternatif) pada matrix preferensi **P**, dan akan memilih bukan hanya **satu** objek, dan mengabaikan yang lain. Melainkan dia memilih semua objek dalam derajat yang bervariasi. Skala rasio dari **AHP** terikat antara 1-9, hal ini menyebabkan **P** tidak mungkin secara penuh memilih satu objek, dimana **v** akan hanya punya satu elemen yang tidak nol. Dan ini berarti **v** akan menjadi salah satu dari basis vektor.

4. PREFERENSI AGREGASI DARI DUA RUANG OBJEK

Hierarchy keputusan dengan m kriteria dan n alternatif disajikan dalam gb. 1. **S(C)** adalah ruang vektor m -dimensi yang direntang oleh basis vektor kriteria α_i , ($i = 1 \dots m$). **S(A)** adalah ruang vektor dengan n -dimensi yang direntang dalam basis vektor ortonormal β_i ($i = 1 \dots n$).

Definisi 3. Sebuah himpunan ortogonal yang setiap vektornya mempunyai norma sama dengan 1 dinamakan ortonormal (Howard Anton, 1995).

Seperti **P**, preferens dari kriteria ditunjukkan dalam preferens operator **Q**. Untuk tiap kriteria i , terdapat satu preferens operator **Pⁱ** yang membandingkan

n alternatif. Jika $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}'$ sebagai vektor preferens yang berhubungan dengan $\mathbf{Q}$ dan $\mathbf{P}'$, maka $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}'$ bisa diperluas dalam term basis vektor sebagai berikut

$$\mathbf{u} = \sum c_i \alpha_i, \quad i = 1 \dots m,$$

$$\mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \quad \text{atau} \quad \sum_{i=1}^m c_i^2 = 1,$$

dengan cara yang sama,

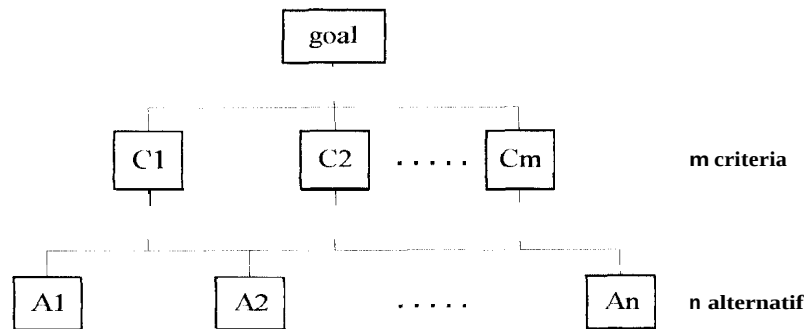
$$\mathbf{v}_i = \sum v_j^i \beta_j, \quad j = 1 \dots n,$$

$$\text{atau} \quad \sum_{j=1}^n (v_j^i)^2 = 1, \quad i = 1 \dots m,$$

v_j^i adalah elemen-elemen dari $\mathbf{v}^i$.

Kombinasi dari kedua ruang keputusan D adalah perkalian titik dari dua objek space yaitu :

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}(\mathbf{C}) \bullet \mathbf{S}(\mathbf{A})$$



gb.1 dua-level hierarki keputusan dengan m kriteria dan n alternatif

Jadi, kombinasi dari state preferens Ψ diperoleh melalui perkalian titik dari $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{V}_i$. Perkalian titik dari komponen-komponen orthogonal $\mathbf{u}$ dengan

preferens vektor yang bersangkutan untuk alternatif-alternatif dalam tiap kriteria dijumlahkan, yaitu :

$$\Psi = c_1 \alpha_1 \mathbf{v}^1 + c_2 \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \dots + c_m \alpha_m \mathbf{v}^m.$$

Seperti yang telah disebutkan diatas, α_i didefinisikan dalam ruang Kriteria, dan $\mathbf{v}^i$ didefinisikan dalam ruang alternatif. keduanya mungkin mempunyai dimensi yang berbeda. Tetapi, karena tiap $\mathbf{v}^i$ bisa dikebangkan / diperluas dalam basis vektor, maka didapatkan persamaan

$$\Psi = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_i \sum_{j=1}^n v_j^i \beta_j = \sum_{ij} c_i v_j^i \alpha_i \beta_j$$

Sehingga *Amplitude preference* M_{kl} (berhubungan dengan *basis state* ke-k dari ruang kriteria dan *basis state* ke-t dari ruang alternatif) bisa didapatkan dengan mengalikan sebelah kiri Ψ dengan $\alpha_k^T \beta_l^T$,

$$M_{kl} = \alpha_k^T \beta_l^T \Psi = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i v_j^i \alpha_k^T \alpha_i \beta_l^T \beta_j = \sum_i \sum_j c_i v_j^i \delta_{ki} \delta_{lj} = c_k v_l^k$$

Probabilitasnya adalah

$$|M_{kl}|^2 = c_k^2 (v_l^k)^2 \dots \dots \dots \quad .(4)$$

Untuk mendapatkan prioritas relatif Π_l untuk suatu alternatif ke-1, M_{kl} untuk semua kriteria k dijumlahkan,

$$\Pi_l = \sum_{k=1}^m [M_{kl}]^2 = \sum_{k=1}^m c_k^2 (v_l^k)^2$$

Sehingga,

$$\sum_{l=1}^n \Pi_l = \sum_{k=1}^m c_k^2 \sum_{l=1}^n (v_l^k)^2 = 1.$$

Maka untuk setiap alternatif didapatkan *grand preferece vector* $\mathbf{V}$ sebagai berikut :

$$\mathbf{V}^T = [V_1, \dots, V_n],$$

dimana,

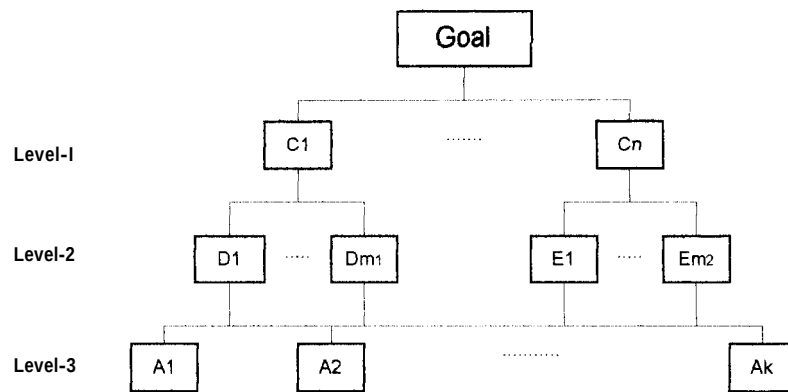
$$V_i = \sqrt{\prod_i} \quad \text{dan} \quad \mathbf{V}^T \mathbf{V} = 1 \dots\dots\dots (5)$$

berikut ini karakteristik dan vektor $\mathbf{V}$,

1. *Magnitude* dari $\mathbf{V}$ adalah satu, $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = 1$.
2. Elemen-elemen dari $\mathbf{V}$ adalah koordinat dari $\mathbf{V}$ sepanjang basis vektor.
3. Elemen-elemen tersebut bisa didapatkan dengan mengalikan sebelah **kiri** $\mathbf{V}$ dengan β_i^{-1} , $V_i = \beta_i^{-1} \mathbf{V}$
4. *magnitude* (panjang euclidius) dari $\mathbf{V}$ adalah satu, jadi V_i adalah cosinus sudut antara $\mathbf{V}$ dan β_i . Dengan kata lain, V_i mengukur inklinasi dari pikiran manusia untuk alternatif ke-i.
5. V_i^2 adalah prioritas relatif dari alternatif i .

5. HIRARKI KEPUTUSAN 3 LEVEL

Untuk pengambilan keputusan lebih dari 2 level, pengagregasian bisa dilakukan dengan cara yang sama. Sebagai contoh untuk struktur hirarki pada gambar 2 mempunyai n kriteria pada level-1, dan untuk tiap-tiap kriteria ke- i , terdapat m_i subkriteria, $i = 1, \dots, n$.



Gb.2 Hirarki tiga level

Dari kriteria ke- i pada level-1 dan subkriteria ke- j pada level-2 didapatkan suatu operator baru $\mathbf{R}^{ij}$ yang elemen-elemennya didapatkan dari akar kuadrat dari matriks berbalikan pada AHP konvensional yang membandingkan alternatif-alternatif untuk tiap-tiap kriteria. Vektor eigen dari operator $\mathbf{R}^{ij}$ dicari untuk mendapatkan vektor preferensi $\mathbf{w}^{ij}$ untuk tiap alternatif yaitu dari persamaan

$$\mathbf{R}^{ij} \mathbf{w}^{ij} = \lambda_{\max} \mathbf{w}^{ij}, \quad \text{dimana} \quad i = 1 \dots n, \text{ dan } j = 1 \dots m_i$$

jelas bahwa

$$(\mathbf{w}^{ij})^T \mathbf{w}^{ij} = 1$$

Untuk kriteria ke- i akan ada m_i subkriteria yang akan dibandingkan satu dengan yang lain, sehingga menghasilkan operator $\mathbf{Q}^i$. Dan dari operator $\mathbf{Q}^i$ akan didapatkan vektor preferensi $\mathbf{v}^i$ dengan mendapatkan vektor eigen dari $\mathbf{Q}^i$, melalui persamaan

$$\mathbf{Q}^i \mathbf{v}^i = \lambda_{\max} \mathbf{v}^i, \quad \text{dimana} \quad i=1 \dots m_i$$

dengan cara yang sama, vektor preferensi $\mathbf{u}$ akan didapatkan dari operator $\mathbf{P}$ yang membandingkan n alternatif pada level-1.

$\mathbf{V}'$, *semi grand preference vector* didapatkan dari mengagregasi vektor preferensi $\mathbf{v}^i$ dan $\mathbf{w}^{ij}$ (lihat persamaan (5)). V_l^i elemen ke- l dari $\mathbf{V}^i$ adalah

$$V_l^i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_j^i)^2 (w_l^{ij})^2} \dots\dots\dots (6)$$

dimana, v_j^i adalah elemen ke- j dari vektor preferensi $\mathbf{v}^i$ dan w_l^{ij} adalah elemen ke- l dari vektor preferensi $\mathbf{w}^{ij}$

Selanjutnya untuk mendapatkan $\mathbf{U}$ vektor preferensi keseluruhan (*Grand preference vector*), $\mathbf{V}'$ diagregasi dengan vektor preferensi $\mathbf{u}$. Elemen ke- l dari $\mathbf{U}$,

$$U_l = \sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2 (v_l^i)^2} \dots\dots\dots (7)$$

menjelaskan prioritas relatif seorang pengambil keputusan terhadap alternatif ke- l .

dimana, u_i adalah elemen ke- i dari vektor preferensi $\mathbf{u}$ dan v_l^i adalah elemen ke- l dari vektor preferensi $\mathbf{v}^i$

6. PREFERENSI GRUP DALAM VAHP: GRUP HOMOGEN

Jika semua individu merupakan suatu **grup** yang homogen (tidak ada perbedaan tingkat jabatan), vektor preferensi grup didapat dengan menjumlahkan vektor-vektor preferensi individu. Vektor preferensi grup dinormalisasi dengan mendapatkan vektor satuan sepanjang vektor resultannya. Hal ini akan dijelaskan lebih detil dibawah.

Grand preferens vector $\mathbf{V}^1, \dots, \mathbf{V}^N$ dari N pengambil keputusan terdapat dalam suatu ruang alternatif n -dimensi. Kondisi normalisasinya adalah :

$$(\mathbf{V}^i)^T \mathbf{V}^i = 1$$

atau

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{V}_j^i)^2 = 1 \quad (i = 1, \dots, N).$$

Vektor resultan dari **grup** adalah

$$\mathbf{G} = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2 + \dots + \mathbf{V}^N$$

Penjumlahan di atas merupakan penjumlahan vektor biasa dalam ruang Euclidius. Sebagai tambahan, untuk menunjukkan perbedaan tingkat kepentingan / jabatan dari tiap-individu bisa dilakukan metode penjumlahan yang diberi bobo. jadi, vektor satuan $\mathbf{G}$ adalah vektor preferensi Grup yang dinormalisasi yang komponen-komponennya adalah

$$\hat{G}_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{V}_i^j}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^N \mathbf{V}_i^j \right)^2}}$$

karena $\mathbf{G}$ adalah vektor satuan, terlihat jelas bahwa,

$$(\hat{\mathbf{G}})^T \hat{\mathbf{G}} = \sum_{i=1}^n (\hat{G}_i)^2 = 1.$$

Dalam **AHP** konvensional **Saaty (1989)** menyatakan penentuan seberapa jauh penilaian seseorang berbeda dengan penilaian kelompok. **Saaty** berargumentasi bahwa pengukuran seperti itu memungkinkan pemakai **AHP** untuk mengidentifikasi individu-individu dan sub kelompok-sub kelompok yang tidak setuju / bertentangan dengan kelompok secara keseluruhan. Dalam

VAHP, bisa diukur seberapa jauh penilaian seseorang berbeda dengan penilaian kelompok. perbedaan ini diukur dalam dua cara :

(a) *angular departure*

Jika $\mathbf{V}^i$ adalah grand preference vektor dari tiap individual dalam kelompok, dan $\mathbf{G}$ adalah vektor preferens kelompok yang telah dinormalisasi, maka hasil kali titik dari keduanya akan mengukur cosinus dari sudut (α_d) diantara para pengambil keputusan :

$$\left(\mathbf{V}^i\right)^T \mathbf{G} = \left|\mathbf{V}^i\right| \left|\mathbf{G}\right| \cos \alpha_d = \cos \alpha_d$$

atau

$$\alpha_d = \cos^{-1} \left(\left(\mathbf{V}^i\right)^T \hat{\mathbf{G}} \right) = \cos^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{V}_j^i \hat{\mathbf{G}}_j \right)$$

(b) *lateral distance*

yaitu selisih antara $\mathbf{G}$ dan $\mathbf{V}^i$.

$$\mathbf{L}_d = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{V}^i$$

karena $\mathbf{G}$ dan $\mathbf{V}^i$ adalah vektor satuan dalam suatu ruang euklidius n -dimensi, maka bisa didapatkan hubungan sederhana antara $|\mathbf{L}_d|$ dan $\cos \alpha_d$.

Karena

$$\mathbf{L}_d = \hat{\mathbf{G}} - \mathbf{V}^i$$

maka,

$$|\mathbf{L}_d|^2 = \left|\hat{\mathbf{G}}\right|^2 + \left|\mathbf{V}^i\right|^2 - 2\hat{\mathbf{G}}^T \mathbf{V}^i = 2 - 2\cos \alpha_d = 4\sin^2 \alpha_d / 2$$

dan

$$|\mathbf{L}_d| = 2 \sin \alpha_d / 2$$

coherence dari kelompok homogen tersebut bisa dihitung, dengan menggunakan teknik yang dipakai untuk mengukur coherence dari sinar cahaya optik (Hecht and Zajac, 1979). Jika $\mathbf{V}^i$ ($i = 1 \dots N$) adalah **grand preference vektor** dari kelompok homogen, maka koherens dari kelompok tersebut adalah

$$\rho = \langle \mathbf{V}^i \cdot \mathbf{V}^j \rangle = \langle (\mathbf{V}^i)^T \mathbf{V}^j \rangle \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j$$

dimana $\cdot$ adalah perkalian titik pada vektor dan $\langle \rangle$ adalah proses untuk mendapatkan rata-rata. Jika semua vektor preferens terletak pada satu garis, maka didapatkan satu kelompok pengambil keputusan yang sangat koherens dengan $\rho = 1$. Namun demikian, koherens tidak akan sama dengan nol, karena vektor preferens tidak pernah orthogonal satu sama lain jika menggunakan skala preferensi Saaty (1-9).