

II. TEORI DASAR

1. ANALISIS STRUKTUR

Didalam perencanaan konstruksi gondola ini dipakai dasar teori mekanika teknik tentang statika, yang mana merupakan konsep dasar yang dipakai sebagai pedoman pada perhitungan konstruksi yang kompleks.

Pada rangka batang dapat dihitung gaya-gaya batang yang diakibatkan oleh beban luar.

Metoda perhitungan yang dapat dipergunakan sebagai berikut :

1. Metode kesetimbangan titik
2. Diagram cremona
3. Method of section secara analitis

1.1 Metoda Kesetimbangan Titik

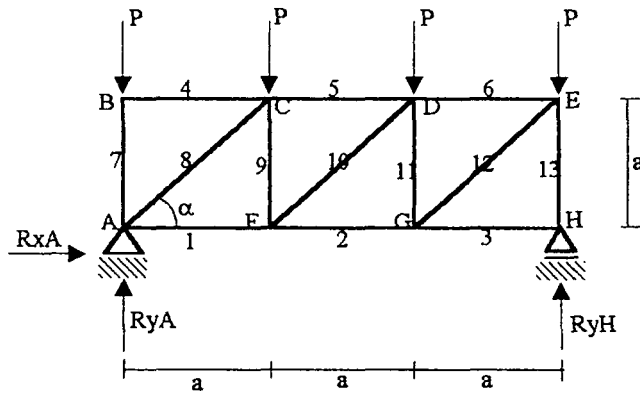
Prinsip metoda ini adalah kesetimbangan gaya-gaya batang di setiap titik kumpul batang dapat dilakukan secara analitis yaitu : $\Sigma H = 0$; $\Sigma V = 0$ atau secara grafis (poligon gaya).

Yang perlu diingat adalah :

- apabila gaya dalam (normal) batang adalah *tekan* maka arah tersebut akan menuju ke titik pertemuan.

- apabila gaya dalam (normal) batang adalah *tarik* maka arah tersebut akan menjauhi titik pertemuan.

Perhatikan konstruksi dibawah ini :



Gambar 2.1 Rangka Batang sederhana

Langkah yang harus dilakukan adalah :

1. Mencari reaksi perletakan

$$\Sigma M = 0, \Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$$

$$- \Sigma M_A = 0$$

$$R_{yH} = 2.P$$

$$- \Sigma F_y = 0$$

$$R_{yA} = 2.P$$

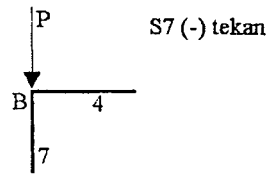
$$- \Sigma F_x = 0$$

$$R_{xA} = 0$$

2. Mencari kesetimbangan tiap titik

Setelah diperoleh reaksi perletakan, maka mulai dilakukan metode ini dimulai dari titik B, sebab jika mulai dari titik A ada 3 gaya batang yang tidak diketahui

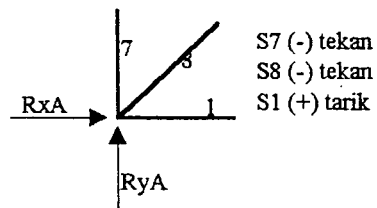
yaitu 1, 7, 8 (maksimum 2 gaya yang belum diketahui besarnya pada suatu titik simpul)



$$\Sigma F_y = 0, \Sigma F_x = 0$$

$$S_7 = P \text{ dan } S_4 = 0$$

Kemudian di titik A (S_1 dan S_8 belum diketahui)

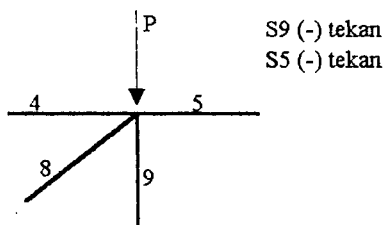


$$\Sigma F_y = 0, \Sigma F_x = 0$$

$$S_8 \sin \alpha = R_{yA} - S_7 = 2P - P = P$$

$$S_1 = R_{xA} = 0$$

Kemudian di titik C (S_9 dan S_5 belum diketahui)



$$\Sigma F_y = 0, \Sigma F_x = 0$$

$$S_9 = P - S_8 \sin \alpha = P - P = 0$$

$$S_5 = S_8 \cos \alpha = P \cotg \alpha$$

Juga pada titik D, E, F, G dan terakhir titik H

5. Dari tiap-tiap titik dapat diperoleh gaya-gaya batang 1 sampai dengan 13.

1.2 Diagram Cremona

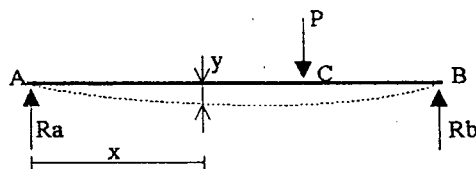
Prinsipnya adalah metoda kesetimbangan titik pertemuan.

Langkah yang harus dilakukan :

1. Seluruh garis sistem rangka batang digambar dengan skala.
2. Batang-batang diberi nomer.
3. Reaksi perletakan dicari secara grafis.
4. Kemudian penggambaran poligon gaya yang tertutup dan saling kejar.

2. LENDUTAN BALOK

Pada perhitungan lendutan balok, ada berbagai metoda perhitungan untuk menyelesaikan perhitungan tersebut. Meskipun pada dasarnya mempergunakan prinsip yang sama, tetapi teknik dan sasaran antar metoda berbeda. Diantaranya adalah metoda integrasi-ganda.



Gambar 2.3 Lendutan balok akibat gaya P

Maka persamaan umumnya dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E I \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (2-1)$$

Persamaan ini dikenal sebagai persamaan diferensial kurva elastik balok. Perkalian $E I$ disebut kekakuan lentur balok, biasanya tetap sepanjang balok.

Dengan mengintegrasikan dua kali persamaan 2-1 maka didapat persamaan lendutan kurva elastis yang dikehendaki guna menunjukkan harga y untuk setiap titik x ; C_1 dan C_2 adalah konstanta yang dievaluasi dari kondisi balok tertentu dan pembebanannya.

Persamaannya dapat dilihat sebagai berikut :

$$E I y = \int \int M dx dx + C_1 x + C_2 \quad (2-2)$$

3. METODE ELEMEN HINGGA SEBAGAI DASAR PERHITUNGAN SAP90

3.1 Konsep Elemen Hingga

Bila suatu kontinum dibagi-bagi kecil menjadi beberapa bagian yang lebih kecil, maka bagian-bagian kecil ini disebut elemen hingga. Proses pembagian suatu kontinum menjadi elemen-elemen hingga ini sering dikenal sebagai proses diskritisasi (pembagian). Dinamakan elemen hingga karena ukuran elemen kecil ini berhingga (bukannya kecil tidak berhingga) dan umumnya memiliki bentuk geometri yang lebih sederhana dibandingkan kontinumnya. Dengan menggunakan elemen hingga suatu masalah yang memiliki jumlah derajat kebebasan tidak berhingga dapat diubah menjadi suatu masalah dengan jumlah derajat kebebasan tertentu sehingga proses pemecahannya dimungkinkan. Meskipun terapan asalnya ditujukan untuk masalah solid mechanics (mekanika benda pejal), namun penggunaannya dapat diaplikasikan ke berbagai disiplin ilmu lainnya yang mempunyai dasar matematis yang sama. Dalam beberapa hal metode ini merupakan metode computer oriented yang harus dilengkapi dengan program-program komputer digital, atau dapat pula menggunakan paket-paket program seperti SAP90, NISA, ANSYS atau NASTRAN.

Kata struktur disini mengandung pengertian semua benda pejal yang dikenai beban atau pengaruh-pengaruh lainnya (pressure, thermal, dan sebagainya). Pengaruh- pengaruh ini akan menyebabkan terjadinya tegangan dalam serta reaksi-reaksi pada titik-titik tertahan (nodal yang di-restraint). Tujuan utama analisa dengan metode elemen hingga ini adalah untuk memperoleh nilai pendekatan (bukan nilai eksak) dari tegangan dan peralihan yang terjadi pada suatu struktur.

3.2 Tegangan Dan Regangan Dalam Kontinum Elastis

Dengan mengasumsikan kontinum elastis yang dianalisa terdiri atas material elastis dengan regangan kecil. Hubungan antara regangan dan tegangannya dapat digambarkan dalam suatu sistem koordinat ortogonal yang mengikuti kaidah tangan kanan. Misalnya, dalam koordinat Cartesius akan terdapat tiga buah sumbu, yaitu x, y dan z. Sedangkan dalam sistem koordinat kutub, sebuah koordinat dinyatakan dalam hubungan r, θ dan z.

Gambar 2.4 memperlihatkan sebuah elemen yang amat kecil dengan sumbu koordinat Cartesius yang panjang sisi-sisinya dinyatakan dengan dx, dy dan dz. Tegangan normal dan tegangan geser digambarkan dengan anak panah pada permukaan elemen. Tegangan normal diberi notasi σ_x , σ_y dan σ_z sedangkan tegangan geser diberi notasi τ_{xy} , τ_{yz} dan seterusnya. Dari persamaan keseimbangan elemen didapatkan hubungan sebagai berikut :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (a)$$

Hanya ada tiga komponen tegangan geser beban yang harus diperhitungkan.

Tegangan-tegangan yang dilukiskan dalam gambar 2.4 akan menimbulkan regangan normal dan regangan geser. Regangan normal ϵ_x , ϵ_y dan ϵ_z didefinisikan sebagai berikut :

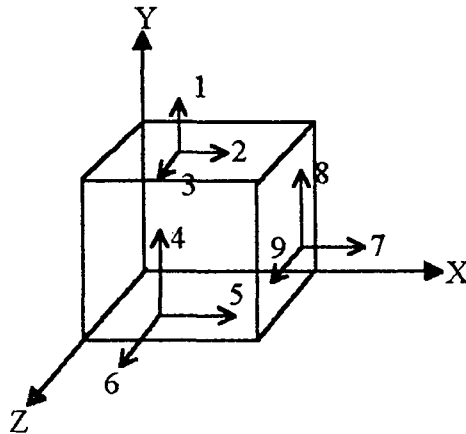
$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (b)$$

dimana u, v dan w merupakan translasi dalam arah x, y dan z.

Regangan geser γ_{xy} , γ_{yz} dan γ_{zx} dinyatakan dalam rumus berikut :

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (c)$$

Dari persamaan ini dapat dilihat bahwa terdapat 3 regangan geser yang bebas.



Keterangan : 1. σ_y 2. τ_{yx} 3. τ_{yz} 4. τ_{zy} 5. τ_{zx} 6. σ_z 7. σ_x
8. τ_{xy} 9. τ_{xz}

Gambar 2.4 Tegangan pada sebuah elemen yang sangat kecil

Untuk mempermudah, keenam tegangan bebas serta keenam regangannya dapat ditulis dalam bentuk matrik kolom (matrik vektor) seperti berikut :

$$\tau = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad (d)$$

Dari persamaan (d) diatas dapat diperoleh hubungan regangan terhadap perpindahan sebagai berikut :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (e)$$

Hubungan tegangan-regangan untuk material isotropik diturunkan dari teori elastisitas sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{-\nu\sigma_x - \nu\sigma_y + \sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}$$

dimana :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Dalam persamaan ini E = Modulus Elastisitas (Modulus Young), G = modulus geser dan ν = poisons ratio. Dalam bentuk matrik hubungan yang terdapat dalam persamaan (e) dapat dituliskan sebagai :

$$[\varepsilon] = [C] (\sigma) \quad (2-3)$$

dimana

$$C = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Matrik C merupakan operator yang menghubungkan vektor regangan, ε dengan vektor tegangan σ . Dengan menginverskan persamaan 2-3 akan diperoleh hubungan tegangan-regangan sebagai berikut :

$$[\sigma] = [E] [\varepsilon] \quad (2-5)$$

dimana

$$E = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Matrik E adalah matrik operator yang menghubungkan vektor tegangan σ dan vektor regangan ε .

Setiap komponen perpindahan dari sebuah titik merupakan fungsi dari ke 3 fungsi koordinat yaitu :

$$u = f(x, y, z) \quad v = f(x, y, z) \quad w = f(x, y, z)$$

Dalam metode elemen hingga, fungsi-fungsi tersebut didekati dengan fungsi yang didefinisikan pada elemen. Selanjutnya perpindahan u, v dan w dinyatakan sebagai fungsi perpindahan node :

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = [N] [q] \quad (2-7)$$

dimana :

q = vektor kolom yang komponen-komponennya adalah perpindahan node

N = matrik shape function

3.3 Metode Elemen Hingga Yang Didasarkan Atas Usaha Virtual

Diambil contoh dari sebuah elemen hingga 3 dimensi yang terletak pada sistem sumbu Cartesius dengan koordinat x , y dan z . Peralihan umum (general displacement) yang terjadi pada sebarang titik dalam elemen dinyatakan dengan vektor kolom u :

$$u = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

dimana u , v dan w berturut-turut merupakan translasi dalam arah x , y , z .

Bila pada elemen tersebut bekerja gaya tubuh (body force), gaya tersebut akan dimasukkan dalam vektor b , sebagai berikut :

$$b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

Notasi b_x , b_y dan b_z mewakili komponen-komponen gaya (persatuan volume, luas atau panjang) yang bekerja pada sebarang titik sesuai arah x , y dan z .

Peralihan titik nodal (nodal displacement) q yang diperhitungkan berupa translasi dalam arah x , y dan z . Bila n_{en} menyatakan jumlah titik nodal elemen, maka :

$$q = \{q_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n_{en}) \quad (2-10)$$

dimana

$$q_i = \begin{bmatrix} q_{xi} \\ q_{yi} \\ q_{zi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} \quad (a)$$

Demikian pula untuk gaya titik nodal (nodal actions) p yaitu :

$$p = \{p_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n_{en}) \quad (2-11)$$

dimana

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ P_{zi} \end{bmatrix} \quad (b)$$

Hubungan antara peralihan umum dan peralihan titik nodal dinyatakan oleh fungsi bentuk peralihan (displacement shape function) yang dalam hal ini digunakan persamaan sebagai berikut :

$$(u) = [N] (q) \quad (2-12)$$

Dalam persamaan ini notasi N adalah matrik segiempat yang menunjukkan bahwa u sepenuhnya tergantung pada q.

Hubungan regangan-peralihan diperoleh dengan menurunkan matrik peralihan umum.

Proses ini ditunjukkan dalam pembentukan matrik d yang disebut operator diferensial linier dan dinyatakan dalam bentuk perkalian matrik :

$$(\epsilon) = [d] (u) \quad (2-13)$$

Dalam persamaan ini operator d menyatakan hubungan antara regangan ϵ dengan vektor peralihan umum (u), dimana matrik operator d adalah :

$$[d] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (c)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2-12) ke dalam persamaan (2-13) akan diperoleh :

$$(\epsilon) = [B] (q) \quad (2-14)$$

dimana

$$[B] = [d] [N] \quad (2-15)$$

Matrik B menunjukkan regangan yang terjadi pada sebarang titik dalam elemen akibat satu satuan peralihan titik nodal. Substitusi persamaan (2-14) ke persamaan (2-5) didapat :

$$\sigma = E B q \quad (2-16)$$

perkalian matrik E B menunjukkan tegangan pada sebarang titik dalam elemen bila terjadi 1 satuan peralihan titik nodal.

Prinsip usaha virtual :

"Bila pada suatu struktur dalam keadaan setimbang, dikerjakan suatu peralihan virtual yang kecil dalam batas-batas deformasi yang masih dapat diterima, maka usaha virtual dari beban luar tersebut sama dengan energi regangan virtual dari tegangan dalamnya."

Jika prinsip di atas diterapkan pada elemen hingga, akan diperoleh :

$$\delta U_e = \delta W_e \quad (2-17)$$

dimana δU adalah energi regangan virtual dari tegangan dalam dan δW merupakan usaha virtual beban luar yang bekerja pada elemen. Untuk memperoleh kedua nilai tersebut, diasumsikan terjadi peralihan virtual kecil yang dinyatakan dalam vektor δq . Jadi :

$$\delta q = \{\delta q_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n_{en}) \quad (d)$$

Kemudian peralihan umum virtual akan menjadi (lihat persamaan 2-12):

$$\delta U = N \delta q \quad (e)$$

Dengan menyatakan hubungan regangan-peralihan dalam persamaan (2-14), akan diperoleh :

$$\delta \varepsilon = B \delta q \quad (f)$$

Energi regangan virtual dalam δU dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\delta U_e = \int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV \quad (g)$$

Selanjutnya, usaha virtual luar dari gaya titik nodal dan body force menjadi :

$$\delta W_e = \delta q^T p + \int_V \delta U^T \cdot b \cdot dV \quad (h)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (g) dan (h) ke dalam persamaan (2-17) akan dihasilkan :

$$\int_V \delta \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dV = \delta q^T p + \int_V \delta U^T \cdot b \cdot dV \quad (i)$$

Kemudian substitusikan persamaan (2-) untuk mengganti σ , dan dengan menggunakan transpose dari persamaan (e) dan (f) akan diperoleh :

$$\delta q^T \int_V B^T \cdot E \cdot \varepsilon \cdot dV = \delta q^T p + \delta q^T \int_V N^T \cdot b \cdot dV \quad (j)$$

Selanjutnya, substitusi persamaan (2-14) untuk nilai ε serta dengan membagi ruas kiri dan ruas kanan dengan δq^T , persamaan (j) akan menjadi :

$$\left(\int_V B^T \cdot E \cdot B \cdot dV \right) q = p + \int_V N^T \cdot b \cdot dV \quad (k)$$

Persamaan (k) dapat dituliskan kembali menjadi :

$$Kq = p + p_b \quad (l)$$

dimana :

$$K = \int_V B^T \cdot E \cdot B \cdot dV \quad (2-18)$$

$$p_b = \int_V N^T \cdot b \cdot dV \quad (2-19)$$

Matrik K dalam persamaan (2-18) adalah matrik kekakuan elemen yaitu gaya yang terjadi pada titik nodal akibat adanya satu satuan peralihan titik nodal. Sedangkan vektor p_b pada persamaan (2-19) menunjukkan gaya nodal ekuivalen akibat bekerjanya body force dalam vektor b.

Tegangan dan regangan yang diturunkan di atas hanya tergantung pada peralihan titik nodal. Jika terjadi regangan awal ε_0 , maka regangan total dapat ditulis sebagai berikut :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + C \sigma \quad (m)$$

$$\Rightarrow \sigma = E (\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (2-20)$$

Bila persamaan ini digunakan untuk mengganti σ dalam persamaan (i), maka akhirnya rumus tersebut akan menghasilkan :

$$Kq = p + p_b + p_0 \quad (2-21)$$

$$p_0 = \int_V B^T \cdot E \cdot \varepsilon_0 \cdot dV \quad (2-22)$$

vektor p_0 merupakan beban titik nodal ekivalen akibat regangan awal atau dapat pula sebagai beban titik nodal yang ditimbulkan oleh perubahan temperatur

$$p_0 = \int_V B^T \cdot E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot dV \quad (2-23)$$

3.4 Metode Elemen Hingga Balok 3D (Space Frame)

Matrik kekakuan elemen balok 3D diperoleh dengan memperhitungkan koefisien kekakuan yang diakibatkan torsi pada elemen balok 2D (plane frame). Dimana matrik kekakuan elemen balok 2D terdiri dari koefisien kekakuan akibat deformasi aksial (truss) dan akibat bending (beam), sehingga setiap joint memiliki 3 DOF.

Matrik kekakuan elemen truss :

$$[K] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrik kekakuan elemen beam :

$$[K] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

Koefisien kekakuan yang diakibatkan torsi. Gambar 2.5 menggambarkan elemen balok dimana torsi yang bekerja pada nodal 1 dan nodal 2 dinotasikan sebagai θ_{x_1} dan θ_{x_2} . Torsi yang terjadi di sepanjang elemen dinyatakan sebagai fungsi interpolasi linier yang diformulasikan seperti persamaan berikut :

$$\theta_x = L_1 \theta_{x_1} + L_2 \theta_{x_2} \quad (2-24)$$

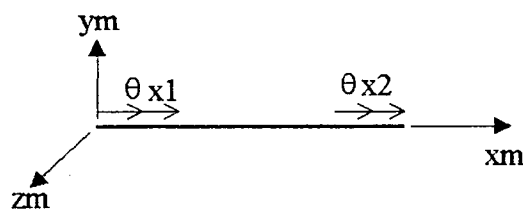
$$\alpha = \frac{d\theta_x}{dx} = \frac{1}{L} (\theta_{x_1} - \theta_{x_2}) \quad (2-25)$$

dimana L_1 dan L_2 adalah koordinat natural, α adalah laju puntiran (rate of twist).

Momen torsi M_x dapat diekspresikan seperti persamaan berikut :

$$M_x = G I_x \alpha = G I_x \frac{1}{L} (\theta_{x_1} - \theta_{x_2}) \quad (2-26)$$

dimana I_x adalah konstanta torsi dan berharga sama dengan momen inersia polar, G adalah modulus geser.



Gambar 2.5 Elemen beam subjected to torsion

Matrik kekakuan untuk elemen beam akibat torsi dapat dihitung dari persamaan sebagai berikut :

$$[K_m] = \int_0^1 [B]^T \cdot [C] \cdot [B] \cdot dl \quad (2-27)$$

dimana :

$$[C] = G I_x$$

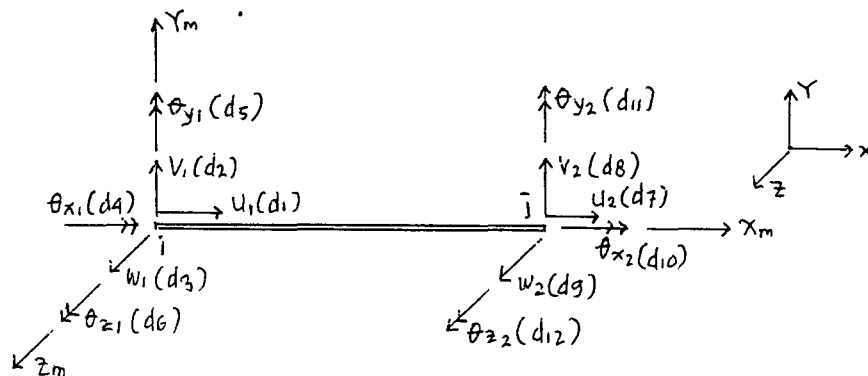
$$[B] = \frac{1}{L}[-1 \ 1]$$

dengan menyelesaikan persamaan (2-27) didapat matrik kekakuan karena pengaruh torsi :

$$[K_m] = \frac{G \cdot I_x}{L^2} \int_L \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} [-1 \ 1] dl$$

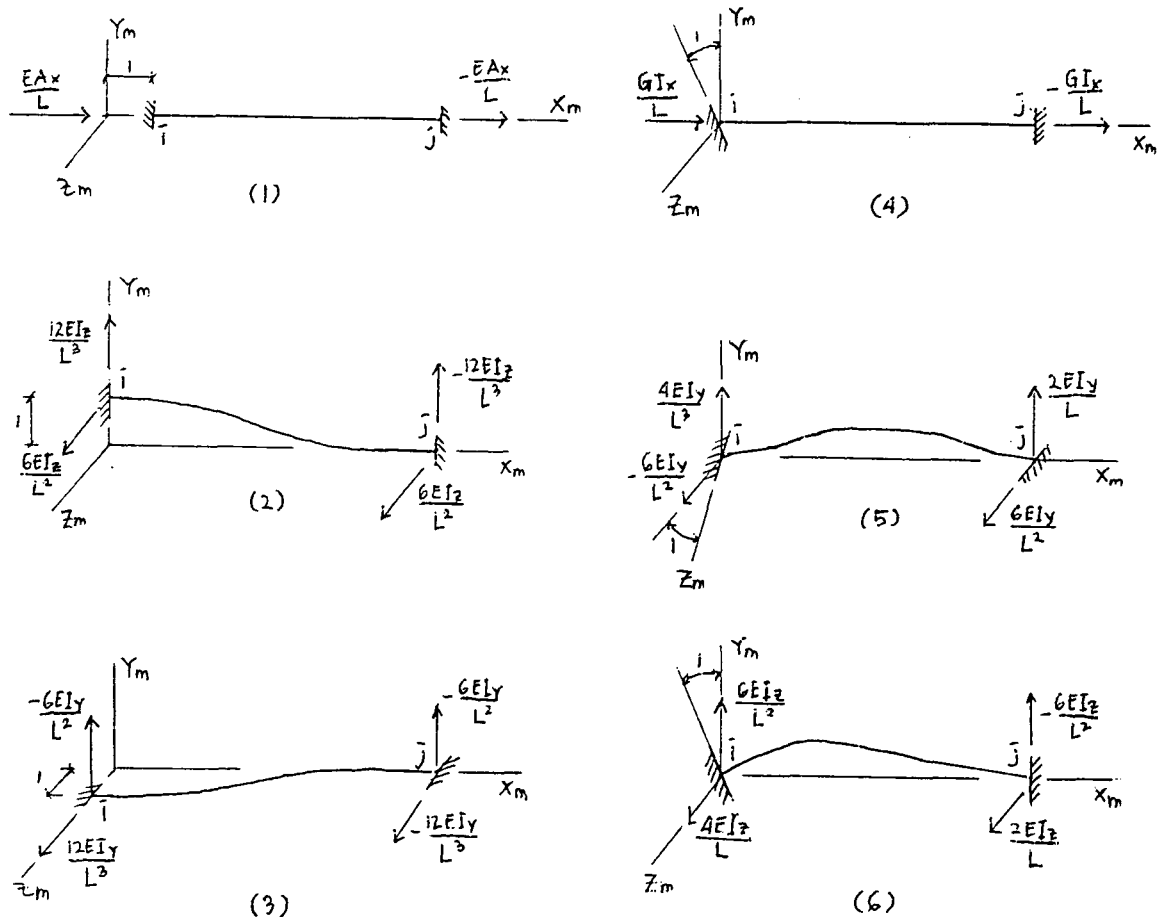
$$[K_m] = \frac{G \cdot I_x}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-28)$$

Matrik kekakuan elemen beam 3D. Anggap sebuah elemen beam prismatik seperti diperlihatkan pada gambar 2.6, dimana sumbu x_m , y_m dan z_m paralel terhadap sumbu global. Sumbu x_m positif mempunyai arah dari node j ke node k . Sumbu y_m dan z_m dipilih sedemikian hingga bidang bending prinsipal.



Gambar 2.6 Elemen beam 3D

Masing-masing join mempunyai 6 derajat kebebasan, sehingga matrik kekakuan elemen beam 3D berukuran 12×12 . Untuk menyusun elemen-elemen matrik kekakuan ini tinjau gambar 2.7 berikut :



Gambar 2.7 Elemen beam 3D

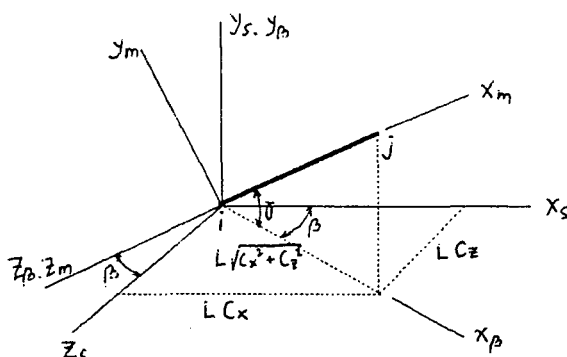
evaluasi koefisien kekakuan

Gambar 2.7 (1), (2), (3) masing-masing menyatakan unit translasi arah x_m , y_m , z_m pada node i . Gambar 2.7 (4), (5), (6) menyatakan unit rotasi dengan sumbu putar x_m , y_m , z_m pada node i . Gambar 2.7 (7), (8), (9) masing-masing menyatakan unit translasi arah x_m , y_m , z_m pada node j . Gambar 2.7 (10), (11), (12) menyatakan unit rotasi dengan sumbu putar x_m , y_m , z_m pada node j .

Matrik kekakuan elemen beam 3D :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & -\frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GIx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GIx}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} \\ -\frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EAx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & \frac{12EIz}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EIy}{L^3} & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EIy}{L^3} & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GIx}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GIx}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{2EIy}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EIy}{L^2} & 0 & \frac{4EIy}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EIz}{L} & 0 & -\frac{6EIz}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EIz}{L} \end{bmatrix}$$

Matrik transformasi sumbu lokal - global. Matrik kekakuan yang telah diturunkan di atas adalah untuk kasus-kasus istimewa dimana sumbu lokal (sumbu elemen) paralel terhadap sumbu global. Jika elemen beam berorientasi sebarang seperti terlihat pada gambar 2.8, maka dibutuhkan matrik transformasi elemen yang menghubungkan sumbu lokal terhadap sumbu global.



Gambar 2.8 Orientasi elemen beam terhadap sumbu global

Gambar 2.9 memperlihatkan ketiga rotasi sumbu global. Sudut rotasi dinotasikan sebagai sumbu β , γ dan α . Rotasi pertama sumbu y sebesar sudut β

Rotasi sumbu $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ dimana sumbu z_β diputar sebesar γ sehingga sumbu x_β berimpit dengan sumbu elemen longitudinal x_m , sumbu z_γ mempunyai arah yang sama dengan z_β . Komponen vektor $Q_{1\gamma}, Q_{2\gamma}, Q_{3\gamma}$ yang merupakan matrik transformasi sumbu $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ terhadap sumbu $x_\beta, y_\beta, z_\beta$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1\beta} \\ Q_{2\beta} \\ Q_{3\beta} \end{bmatrix} \quad (2-34)$$

dimana :

$$\cos \gamma = \sqrt{Cx^2 + Cz^2}, \quad \sin \gamma = Cy$$

Sehingga matrik transformasi rotasi ini adalah sebagai berikut :

$$[T\gamma] = \begin{bmatrix} \sqrt{Cx^2 + Cz^2} & Cy & 0 \\ -Cy & \sqrt{Cx^2 + Cz^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

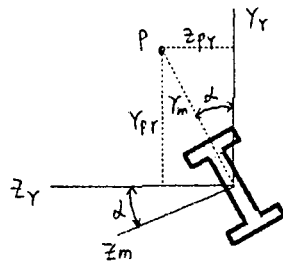
Langkah terakhir adalah sumbu $x_\gamma, y_\gamma, z_\gamma$ diputar sedemikian hingga sumbu x_γ dan y_γ berimpit dengan sumbu x_m dan z_m elemen. Komponen vektor Q_{1m}, Q_{2m}, Q_{3m} terhadap sumbu x_m, y_m, z_m dapat diekspresikan dalam bentuk $Q_{1\gamma}, Q_{2\gamma}, Q_{3\gamma}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Q_{1m} \\ Q_{2m} \\ Q_{3m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

atau dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} Q_{1m} \\ Q_{2m} \\ Q_{3m} \end{bmatrix} = [T\gamma] \begin{bmatrix} Q_{1\gamma} \\ Q_{2\gamma} \\ Q_{3\gamma} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

dimana sudut γ dapat dihitung dari bidang $y\gamma - z\gamma$ terhadap sumbu utama cross section elemen terlihat pada gambar 2.10



Gambar 2.10 Rotasi elemen beam 3D sumbu xm

Dengan mengkombinasikan matrik transformasi dari persamaan (2-33), (2-35) dan (2-37) diperoleh komponen vektor yang menyatakan hubungan sumbu global terhadap sumbu lokal elemen sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 [Q_m] &= [T_\alpha] [T_\gamma] [T_\beta] [Q'] \\
 \rightarrow [Q_n] &= [T'] [Q'] \quad (2-38)
 \end{aligned}$$

dimana :

$$[T'] = [T_\alpha] [T_\gamma] [T_\beta] \quad (2-38a)$$

Substitusi harga masing-masing $[T_\alpha]$, $[T_\gamma]$, $[T_\beta]$ diperoleh :

$$[T'] = \begin{bmatrix}
 \frac{Cx}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} & \frac{Cy}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} \cos\alpha & \frac{Cz}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} \\
 \frac{-CxCy\cos\alpha - Cz\sin\alpha}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} & \cos\alpha & \frac{-CyCz\cos\alpha - Cx\sin\alpha}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} \\
 \frac{CxCy\sin\alpha - Cz\cos\alpha}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}} & -\sin\alpha & \frac{CyCz\sin\alpha - Cx\cos\alpha}{\sqrt{Cx^2+Cz^2}}
 \end{bmatrix} \quad (2-39)$$

Untuk ke 12 derajat kebebasan elemen beam 3D matrik transformasi rotasi dapat diekspresikan sebagai berikut :

$$[Q_m] = [T] [Q]$$

dimana

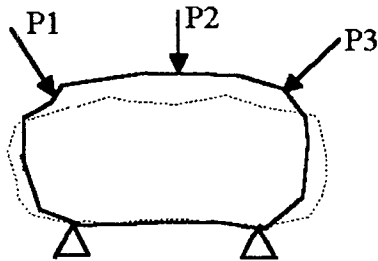
$$[T] = \begin{bmatrix}
 [T'] & [0] & [0] & [0] \\
 [0] & [T'] & [0] & [0] \\
 [0] & [0] & [T'] & [0] \\
 [0] & [0] & [0] & [T']
 \end{bmatrix} \quad (2-40)$$

Matrik kekakuan elemen referensi sumbu global dapat diperoleh dari perkalian matrik berikut ini :

$$[k] = [T]^T [km] [T] \quad (2-41)$$

3.5 Prinsip Super Posisi

Apabila sebuah struktur, misalkan seperti pada gambar, dikenai sejumlah gaya P_1 , P_2 dan P_3 maka deformasi yang terjadi akibat gaya-gaya tersebut sama dengan jumlah deformasi yang terjadi apabila masing-masing gaya diberikan secara terpisah.



Menurut prinsip super posisi maka :

$$\begin{aligned} q_1 &= f_{11} P_1 + f_{12} P_2 + f_{13} P_3 \\ q_2 &= f_{12} P_1 + f_{22} P_2 + f_{23} P_3 \\ q_3 &= f_{13} P_1 + f_{23} P_2 + f_{33} P_3 \end{aligned} \quad (2-42)$$

dimana :

q_1 = komponen gaya arah P_1

q_2 = komponen gaya arah P_2

q_3 = komponen gaya arah P_3

f_{ij} = koefisien fleksibilitas, yaitu koefisien yang mendefinisikan

perpindahan di titik i akibat satu satuan gaya yang bekerja di titik j .

Dalam notasi matrik :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (2-43)$$

atau

$$\{q\} = [f] \{P\} \quad (2-44)$$

dimana [f] adalah matrik fleksibilitas

Persamaan diatas dapat dituliskan sebagai :

$$[K] \{q\} = \{P\} \quad (2-45)$$

dimana $[K] = [f]^{-1}$

$[K]$ = matrik kekakuan

4. TEORI DISTORSI ENERGI

Kriteria kegagalan pada distorsi energi didasarkan pada perbandingan distorsi energi elemen per unit volume dengan distorsi energi per unit volume tegangan luluh bahan. Persamaan distorsi energi sebagai berikut :

$$U_d = U - U_{\sigma(av)} = \frac{1+\nu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) \quad (2-46)$$

Pada tensile test :

$$\sigma_1 = \sigma_x = Syp \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

Dengan mengganti $\sigma_1 = Syp / N$ didapat teori distorsi energi untuk kasus tiga (3)

dimensi sebagai berikut :

$$\left(\frac{Syp}{N}\right)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3 \quad (2-47)$$

Untuk dua (2) dimensi, dimana $\sigma_3 = 0$

$$\left(\frac{Syp}{N}\right)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 \quad (2-48)$$

Untuk kasus dimana :

$$\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Tegangan prinsipal menjadi :

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \tau_{\max} \quad (2-49)$$

$$\tau_{\max} = \left[\left(\frac{1}{2} \sigma_x \right)^2 + \tau_{xy}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-50)$$

Substitusi persamaan 2-16 kita dapatkan :

$$\frac{S_{yp}}{N} = \left(\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2-51)$$

Teori distorsi energi direkomendasikan, memprediksi dengan tepat kegagalan pada material ductile atau baja.