

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Elemen Hingga

Metode elemen hingga (MEH) sudah lama digunakan sebagai metode numerik praktis. Metode ini telah mempermudah analisis dalam menyelesaikan masalah-masalah yang biasanya sulit dipecahkan dengan metode analitik (Cook *et al.*, 2002). *Shape function* MEH menggunakan basis polinom yang diinterpolasi pada elemen dari *nodes* yang terdapat pada elemen. Ini berbeda dengan MEH berbasis Kriging (MEH-K) dan *meshfree method*, yang mana *shape function* dibangun juga dengan bantuan *nodes* di sekitarnya. Pengguna MEH dalam praktek lebih sering menggunakan elemen sederhana seperti elemen tetrahedron (tiga dimensi) untuk mempermudah perhitungan tetapi hasilnya memiliki akurasi buruk pada gradien dari *field variable*, seperti tegangan. Agar akurasi meningkat, analisis dapat mengubah struktur *mesh* dengan elemen-elemen yang lebih kecil atau dapat menggunakan jumlah suku basis polinom yang lebih banyak. Perubahan struktur *mesh* menjadi lebih kecil disebut *h-refinement*.

2.2 Berbagai Meshfree Methods untuk Masalah Tiga Dimensi Solids

Meshfree methods mulai dikembangkan dan diperkenalkan untuk mengatasi permasalahan dari MEH. Kelebihan metode ini yaitu tidak diperlukannya *mesh* sehingga permasalahan seperti distorsi elemen dapat dihindari. Salah satu variasi dari *meshfree method* yang dianggap layak diaplikasikan dalam menyelesaikan masalah praktis yaitu *elemen free Galerkin method* (EFGM) (Belytschko *et al.*, 1994). Oleh karena didasarkan pada *Galerkin weak form*, EFGM membutuhkan *background cell* untuk diskretisasi pada *Galerkin weak form*. Kelemahan EFGM yaitu kurangnya *Kronecker delta property* sehingga kesulitan untuk mengenakan *essential boundary conditions* dalam EFGM (Dai *et al.*, 2003). Untuk mengembangkan EFGM yang memiliki *Kronecker delta property*, diperkenalkanlah RPIM oleh Wang & Liu (2002). *Shape function* RPIM diturunkan dari interpolasi yang melewati setiap *node* dalam suatu *local support domain*. Ada dua tipe fungsi basis yaitu fungsi basis polinom (Liu & Gu, 2001)

dan fungsi basis radial (RBF) (Wang & Liu, 2002). Matriks moment basis polinom tidak bisa selalu di-*inverse* dan butuh teknik spesial untuk mengatasi masalah singularitas yang pastinya akan meningkatkan biaya komputasi. Sedangkan matriks moment basis radial bisa di-*inverse*. Gabungan dari kedua fungsi basis ini dapat mengatasi sebagian besar masalah singularitas matriks momen. Secara umum kelemahan dalam pemakaian *meshfree methods* adalah kesulitan mencari metode yang efisien, stabil, dan sebaiknya kompatibel dalam membentuk *meshfree shape function* (Dai et al, 2003).

Karena *meshfree methods* tidak menggunakan elemen maka terdapat isu perlunya sistem mencari dan menyeleksi *nodes* sekitar yang cocok. Ada dua konsep seleksi *nodes* yang digunakan untuk interpolasi pada *meshfree methods* yaitu *support domain* dan *influence domain* (Liu, 2002). *Support domain* adalah daerah yang membangun *shape function* suatu titik yang diinginkan (misal *sampling point*). *Support domain* dapat berupa suatu daerah berbentuk persegi atau lingkaran, sedangkan *influence domain* adalah daerah yang akan dipengaruhi oleh suatu *node*. Pada permasalahan yang memiliki kepadatan *nodal* yang sangat beragam, konsep *support domain* dapat menyebabkan seleksi *nodes* yang tidak seimbang saat membentuk *shape function*. Masalah ini dapat diatasi dengan konsep *influence domain*.

Secara umum pada *meshfree methods*, untuk menentukan dimensi dari *support domain* maupun *influence domain* dapat dirumuskan dengan:

$$d_s = \alpha_s d_c \quad (2.1)$$

di mana α_s adalah ukuran tanpa dimensi suatu domain, d_c panjang karakteristik yang berhubungan dengan jarak *node* yang dekat dengan titik x , dan d_c adalah rata-rata jarak dari *node* di dalam *domain*. Faktor α_s bisa disebut juga faktor pengali dari d_c , biasanya cukup diambil 2-3 untuk mendapatkan hasil yang baik. Pada kasus tiga dimensi (3D) d_c dapat ditentukan dengan persamaan (Liu, 2002):

$$d_c = \frac{\sqrt[3]{V_s}}{\sqrt[3]{NV_s-1}} \quad (2.2)$$

di mana V_s adalah estimasi volume yang berada di dalam *support domain of* d_s dan NV_s adalah jumlah *node* yang berada di dalam V_s . Berikut prosedur untuk menentukan d_s :

1. Estimasi d_s untuk titik x yang berada di dalam V_s
2. Menghitung banyaknya *node* dalam V_s
3. Menggunakan persamaan (2.2) untuk menghitung d_c
4. Terakhir, Hitung d_s dengan menggunakan α_s yang dikehendaki pada persamaan (2.1)

2.2.1 Radial Point Interpolation Method

Radial point interpolation method (RPIM) menggunakan dua fungsi basis, yaitu polinom dan radial (Wang & Liu, 2002). Maka dari itu, metode ini memiliki kemiripan dengan Kriging. Bentuk fungsi basis radial (RBF) yang dipakai pada RPIM dapat dilihat pada Tabel 2.1. Berikut keuntungan dari RBF sebagai fungsi basis:

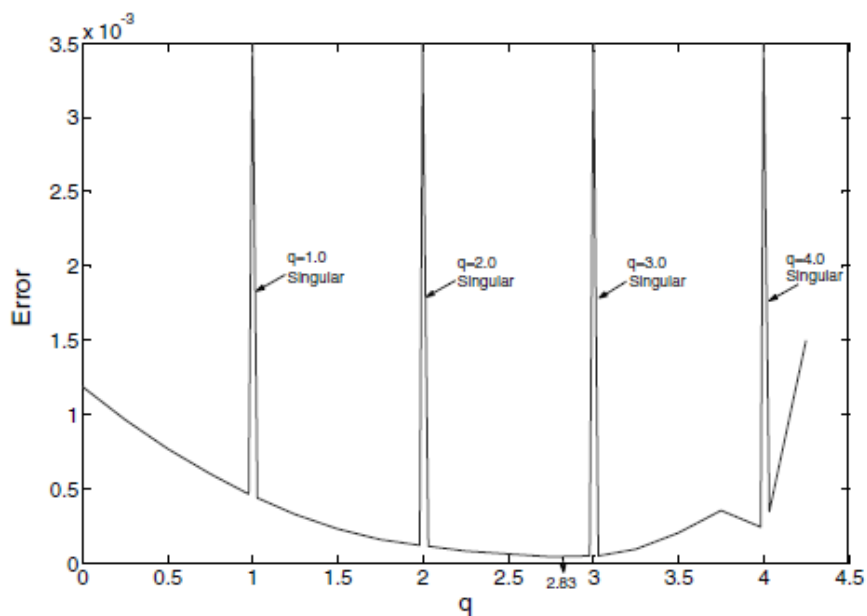
- RBF efektif menyelesaikan masalah singularitas dari polinom PIM.
- *Shape function* RPIM stabil sehingga fleksibel untuk distribusi *node* teratur atau tak teratur.
- RPIM mudah dibuat pada permasalahan 3D, karena satu-satunya variabel adalah jarak di dalam RBF.

Tabel 2.1 Fungsi basis radial pada RPIM (Liu *et al*, 2005)

Nama	Expresi	Parameter
1. <i>Multi-quadrics</i> (MQ)	$R_i(x, y, z) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
2. Gaussian (EXP)	$R_i(x, y, z) = \exp \left[-\alpha_c \left(\frac{r_i}{d_c} \right)^2 \right]$	α_c
3. <i>Thin Plate Spline</i>	$R_i(x, y, z) = r_i^\eta$	η
4. <i>Logarithmic</i>	$R_i(x, y, z) = r_i^\eta \log r_i$	η

Parameter α_c dan q sangat mempengaruhi *shape function* RPIM. Pada Penelitian Wang & Liu (2002), untuk permasalahan dua dimensi (2D) RPIM dipelajari bahwa parameter q terbaik dan konsisten yaitu pada nilai 1,03. Pada penelitian Liu *et al.* (2005) untuk permasalahan 3D, RPIM berbasis *multi-quadrics* (MQ) dicoba dengan model *support domain* berbentuk bola. Lalu,

menghitung kesalahan pada interpolasi fungsi RBF tersebut. Hasilnya nilai parameter q yang baik pada nilai antara 1-3, (tetapi tidak pada nilai 1, 2, 3) seperti pada Gambar 2.1. Pada Gambar 2.1 parameter q terbaik dengan kesalahan terkecil yaitu pada nilai 2,83. Untuk parameter α_c diambil 4, agar lebih konsisten. Terlihat pada kedua penelitian ini bahwa terdapat perbedaan nilai parameter pada masalah 2D dengan masalah 3D. Oleh karena itu perlu menyelidiki lebih lanjut *range* parameter korelasi, θ , pada Kriging dalam masalah 3D, tidak semerta-merta menggunakan *range* parameter korelasi pada masalah 2D.



Gambar 2.1. Kesalahan pada pencocokan interpolasi dengan *shape function* RPIM-MQ (Liu *et al*, 2005)

Dalam menyelesaikan permasalahan 3D, RPIM mampu konvergen dengan baik, hasilnya cukup halus dan kesalahannya mendekati nol saat jarak antar *node* cukup kecil. RPIM sangat stabil, kuat, lebih akurat dan dapat diandalkan dalam analisis tegangan 3D *solids* (Liu *et al*, 2005).

Bila dibandingkan dengan MEH, RPIM menghasilkan konvergen yang lebih cepat. Namun, RPIM lebih mahal 3-5 kali harga komputasinya daripada MEH karena *shape function* RPIM dibangun saat proses komputasi dan menggunakan *nodes* yang tidak terstruktur (Dai *et al*, 2003).

Prosedur numerik dari RPIM untuk masalah 3D adalah sebagai berikut (Liu, 2002):

- *Looping* pada *background cells* yang menentukan semua titik untuk integrasi (*sampling point*) untuk mencari lokasi dan nilai *weights*.
- *Looping* pada *sampling point*.
 - Menentukan *support domain* pada *sampling point* dan memilih *node* berdasarkan kriteria.
 - Menghitung *shape function* dan turunannya untuk setiap *sampling point*.
 - Mendapatkan kekakuan dan nilai *weights* pada setiap *sampling point*.
 - Menghimpun setiap kontribusi dari *sampling point* ke bentuk sistem persamaan.
- Memasukkan *essential boundary conditions*.
- Menyelesaikan sistem persamaan untuk menghasilkan perpindahan *nodal*.
- Menghitung komponen tegangan.

Seperti dikatakan sebelum ini, *meshfree methods* yang didasarkan pada *Galerkin weak form* (EFGM) akan membutuhkan *background cell*. Maka dari itu direkomendasikan menggunakan *mesh* segitiga yang dengan mudah dihasilkan melalui *Delaunay triangulation technique*. Keuntungan menggunakan *mesh* segitiga adalah sebagai (Liu, 2002):

1. Algoritma yang matang tersedia pada *domain* yang dapat digunakan untuk membangun integrasi *cells* dan *field node* secara bersamaan.
2. *Delaunay triangulation technique* dapat bekerja secara otomatis dengan segala kerumitan *node*.
3. *Mesh* segitiga dapat dibangun secara otomatis pada analisis 2D maupun 3D.

Mesh segitiga dapat menentukan ukuran dari *influence domain* untuk memilih *node* dalam membangun *shape function*. Untuk menjamin keberhasilan dalam membangun *shape function*, diperlunya sebuah angka yang ditentukan

sebagai batas bagi jumlah *nodes* yang berada di dalam *influence domain*. Sehingga ukuran dari *influence domain* dapat diatur otomatis bila jumlah *nodes* berada di atas suatu batas bawah. Jumlah total titik untuk integrasi (*sampling point*) dalam sebuah *domain* (n_Q) harus lebih besar dari $2/3$ jumlah dari *field nodes* (n_t), $n_Q > \frac{2}{3} n_t$. Batas ini digunakan untuk menjamin sistem matriks yang tidak singular, tetapi tidak menjamin keakuratan solusi. Untuk mencapai hasil yang ekonomis tetapi juga akurat diperlukan $n_Q = 3 n_t$ (Liu, 2002).

2.2.2 Natural Neighbour RPIM

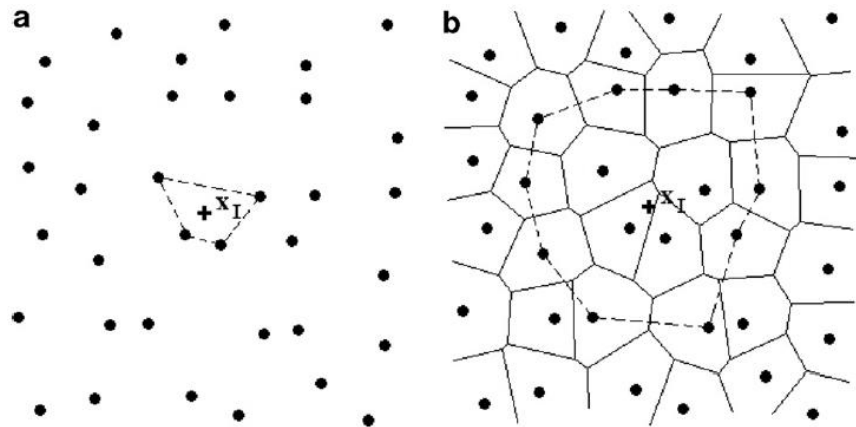
Seperti permasalahan yang dijelaskan sebelumnya, salah satu isu pada *meshfree methods* terletak pada metode mencari dan menyeleksi *nodes* sekitar. Diperkenalkanlah *natural neighbour RPIM* (NNRPIM) (Dinis *et al*, 2006) yang merupakan RPIM dengan menggunakan *natural elemen method* (NEM). *Node* pada *meshfree methods* boleh terdistribusi tak teratur di dalam *influence domain* dan *node*-nya boleh saling tumpang tindih. Ini berbeda dengan MEH yang memiliki peraturan tidak boleh ada elemen yang saling tumpang tindih. Tidak seperti MEH, yang mana adanya pembatasan geometri pada elemen untuk konvergensi. Pada NNRPIM mengizinkan jumlah distribusi *node* sembarang untuk diskretisasi masalah. NNRPIM mengimplementasi *displacement based Galerkin*, untuk menemukan dan menyelesaikan kesetimbangan dari persamaan elastisitas.

Dalam penelitian Dinis *et al*. (2006) ini, NNRPIM menggunakan NEM sebagai diskretisasi *Galerkin weak form*. *Trial* dan *test function* NEM dibangun dengan *natural neighbour interpolants*, yang menggambarkan sebuah *multivariate data interpolation scheme*. Pada mulanya, *natural neighbour interpolants* digunakan dalam pencocokan data. Metode ini bergantung pada geometri dan konsep matematik, seperti *Voronoi diagrams* dan *Delaunay triangles*.

Voronoi diagrams terdiri dari sekumpulan *Voronoi cells* yang terbentuk dari setengah jarak antara *node* dengan *node* tetangga terdekat. Dan *Delaunay triangles* berupa *mesh* segitiga yang mana setiap sisi segitiga merupakan jarak antara *node* dengan *node* tetangga yang terhubung dalam sebuah *Voronoi cells*.

Voronoi diagrams digunakan untuk membuat *influence cell*. *Voronoi diagrams* memaksa adanya konektivitas antara *node*. Di samping itu, dualitas antara penggunaan *Voronoi cells* dan *Delaunay triangles* digunakan untuk membangun *sampling point* pada *mesh* yang bergantung pada *nodal*.

Influence cell adalah sebuah *cell* yang dibentuk dari beberapa *nodes* yang berkontribusi dalam membangun *shape function* suatu titik yang diinginkan. *Influence cell* merupakan konsep yang mirip dengan *influence domain*. *Influence cell* dapat terbagi berlapis seperti *first degree influence cell* dan *second degree influence cell*, terlihat seperti pada Gambar 2.2. Konsep *degree* tersebut mirip seperti konsep lapisan di *domain of influence* (DOI) pada metode elemen hingga berbasis Kriging.



Gambar 2.2 (a) *First degree influence cell*, (b) *second degree influence cell* (Dinis *et al*, 2006)

Pada penelitian numerik oleh Dinis *et al.* (2006), biaya komputasi NRPIM dengan *first degree* lebih kecil dibandingkan dengan RPIM. Bila RPIM dibandingkan dengan MEH, komputasi RPIM kurang efektif dibandingkan dengan MEH. Selain dari itu, NRPIM dapat konvergensi lebih cepat dibandingkan dengan *nine node*-MEH. Pada masalah 3D *solids*, hasil NRPIM dekat dengan hasil dari MEH meskipun komputasi NRPIM kurang efisien daripada MEH.

2.3 Metode Elemen Hingga Berbasis Kriging

Akhir-akhir ini telah dikembangkan suatu metode yang mirip RPIM, yaitu MEH berbasis Kriging (MEH-K). MEH-K menerapkan fungsi basis polinom dan radial (mirip RPIM) pada *mesh* berupa elemen dan *nodes*. Perbedaannya terdapat pada bentuk dari DOI, RPIM menggunakan DOI berbentuk seperti bola sedangkan MEH-K menggunakan DOI yang terbentuk dari konektivitas antara elemen dan *nodes*. Kriging awalnya digunakan dan ditinjau pada MEH oleh Plengkhom & Kanok-Nukulchai (2005). MEH-K menunjukkan hasil yang memuaskan pada beberapa permasalahan numerik di struktur dan mekanika. MEH-K mulai diterapkan untuk menyelesaikan masalah 1D *bar* dan 2D *solids* oleh Plengkhom & Kanok-Nukulchai (2005). Perkembangan selanjutnya, Wong & Kanok-Nukulchai (2006a, 2006b) memperbaiki metode MEH-K dengan penggunaan fungsi korelasi *quartic spline* dan dikembangkan untuk analisis pelat Reissner-Mindlin. Selanjutnya MEH-K dikembangkan dan diterapkan untuk analisis struktur *shell* (Wong & Kanok-Nukulchai, 2008; Wong, 2009), analisis balok Timoshenko (Syamsoeyadi, 2009), analisis 2D *solids* dengan *material discontinuity*, 3D *solids*, dan *multiscale simulation* (Sommanawat, 2010; Sommanawat & Kanok-Nukulchai, 2009). Kemudian untuk uji konvergensi, penelitian dilakukan oleh Wong & Kanok-Nukulchai (2009) pada analisis 2D *plane stress* dan pelat Reissner-Mindlin.

Pada penelitian Sommanawat (2010), MEH-K dikembangkan untuk analisis permasalahan 3D *solids*. Salah satu kekurangan dari penelitian ini, belum memberikan rekomendasi parameter korelasi, θ , yang cocok untuk masalah 3D. Menurut Plengkhom & Kanok-Nukulchai (2005), nilai-nilai parameter korelasi harus memenuhi syarat *range* tertentu agar parameter korelasi memberi nilai yang baik pada interpolasi Kriging. Oleh karena itu perlu mencari *range* yang cocok untuk parameter korelasi. Selain itu, penelitian Sommanawat (2010) masih terbatas dengan *sampling point* yang sedikit, yaitu untuk elemen tetrahedron hanya dengan empat *sampling point* dan elemen hexahedron hanya dengan delapan *sampling point*, sedangkan pada analisis 2D (Wong, 2009) didapati integrasi interpolasi MEH-K menggunakan 7 *sampling point* agar komputasi MEH-K lebih akurat dan efisien. Maka dari itu perlu diselediki lebih lanjut jumlah

sampling point yang optimal. Kekurangan lainnya, penelitian tersebut belum menguji sifat konvergensi terhadap perhitungan analitik secara komprehensif. Contoh numerik penelitian oleh Sommanawat (2010) hanya pada 3D *cantilever beam* dan *patch test*, hasilnya konvergensi 3D MEH-K lebih lambat sedikit daripada MEH. Namun dengan meningkatkan basis polinomial dari linier ke kuadratik hasilnya lebih cepat akurat sesuai solusi analitik dalam defleksi dan tegangan. Masih perlu penelitian lebih lanjut untuk menguji sifat konvergensi dari MEH-K untuk 3D *solids*.

2.3.1 *Conforming dan Non-Conforming Kriging*

Suatu metode numerik diuji dengan *patch test* agar layak digunakan dalam menyelesaikan *problem*. Metode numerik tersebut agar melalui *patch test* harus memiliki syarat sebagai berikut (Liu, 2002):

1. *Shape function* paling tidak konsisten linier
2. Fungsi pendekatan harus kompatibel (*conforming*)
3. *Essential boundary conditions* dapat ditentukan dengan akurat
4. Dibutuhkan integrasi numerik yang akurat

Interpolasi Kriging dalam MEH-K dapat memenuhi syarat pertama, ketiga dan keempat. Suatu interpolasi kompatibel yang disebut juga *conforming* artinya adanya kesesuaian nilai antara dua elemen bersebelahan. Jika pada interpolasi Kriging, semua *sampling point* menggunakan sekumpulan *nodes* dalam lapisan DOI yang sama maka akan kompatibel. Tetapi tidak kompatibel bila antara dua elemen yang bersebelahan tidak memakai grup *nodes* dalam lapisan DOI yang sama. Maka dari itu, interpolasi Kriging tidak memenuhi syarat kompatibel kecuali MEH-K dengan satu lapisan DOI (*domain of influence*) (Wong & Kanok-Nukulchai, 2009).

Metode numerik yang lolos *patch test* pasti memiliki sifat konvergensi yang baik, tetapi hanya tidak lolos pada syarat kedua dari *patch test* bukanlah berarti metode numerik tidak dapat konvergen dengan baik. MEH-K tidak kompatibel saat struktur *mesh* dengan elemen-elemen yang besar, tetapi MEH-K dapat lebih kompatibel bila mengubah struktur *mesh* dengan elemen-elemen yang

lebih kecil. Maka dari itu MEH-K memiliki sifat konvergensi yang baik walaupun tidak kompatibel.

MEH-K juga dapat kompatibel bila menambahkan metode perbaikan. Dai et al (2003) menguji sifat konvergensi antara MEH-K dengan *non-conforming* Kriging (NK) terhadap MEH-K dengan *conforming* Kriging (CK) di mana *penalty method* digunakan sebagai metode perbaikan. Contoh numerik *beam* pada penelitian ini, *error* pada perpindahan dari CK sedikit lebih kecil daripada NK dan juga *penalty method* pada CK telah mengurangi percepatan konvergensi. Maka dapat disimpulkan NK dapat bekerja dengan baik daripada CK.

Oleh karena MEH-K masih belum diteliti lebih lanjut untuk mendapatkan metode perbaikan yang cocok, lalu hasil dari NK masih memiliki sifat konvergensi yang baik, maka pada penelitian kali ini menggunakan *non-conforming* MEH-K.