II. TEORI DASAR

1. PETA KENDALI $\bar{x}$

1.1 Definisi

Di lapangan/lantai produksi umumnya kita menjumpai penggunaan peta kendali variabel seperti peta kendali $\bar{x}$ dan R atau S. Peta kendali variabel adalah peta kendali dengan karakteristik kualitas yang dapat diukur dengan sebuah skala numerik. Contohnya antara lain panjang, diameter, kelembaban, temperatur dan viskositas.

Ditinjau dari karakteristik data, selain peta kendali variabel masih ada satu jenis peta kendali lagi yaitu peta kendali atribut. Peta kendali atribut adalah peta kendali dengan karakteristik kualitas yang tidak dapat diukur secara numerik tetapi ditentukan secara subyektif. Contohnya antara lain barang tersebut baik atau cacat, produk itu gores atau mulus dan produk ini cuil atau tidak. Peta kendali atribut tidak dapat memberikan informasi/data kuantitatif yang lebih obyektif. Oleh karena itu peta kendali variabel lebih sering dijumpai pengaplikasiannya. Meskipun sebenarnya biaya inspeksi dengan peta kendali variabel relatif lebih tinggi daripada peta kendali atribut.

Peta kendali variabel yang umumnya dipakai adalah pasangan peta kendali $\bar{x}$ dengan peta kendali R ataupun peta kendali S. Peta kendali $\bar{x}$

adalah peta yang digunakan untuk memonitor dan mengendalikan nilai rerata proses.

Nilai rerata yang menjadi acuan adalah nilai rerata dari sampel-sampel pendahuluan yang diambil ketika proses itu diduga terkendali. Nilai rerata ini didapatkan dari rerata tiap subgrup/sampel yang didefinisikan:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{g} \overline{x_i}}{g} \tag{1.1}$$

dimana

X_I adalah rerata dari subgrup ke-i

g adalah jumlah urutan observasi

Jika rerata dan simpangan baku acuan diketahui maka garis tengah dan batas kendali untuk peta kendali $\overline{x}$ menjadi :

$$\begin{aligned} UCL_{\bar{x}} &= \mu_0 + 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ CL_{\bar{x}} &= \mu_0 \\ LCL_{\bar{x}} &= \mu_0 - 3\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{aligned} \tag{1.2}$$

dimana

n adalah jumlah/ukuran sampel dan umumnya dipakai 5[1].

Jika rerata dan simpangan baku acuan tidak diketahui maka acuan tersebut dapat diperoleh dari nilai rerata dan simpangan baku pada proses yang diduga terkendali sehingga garis tengah dan batas kendalinya menjadi:

---

[1] Richard E. Devor, et al. *Statistical Quality and Control: Contemporary Concepts and Methods*. (USA: Macmillan Publishing Company, Inc, 1992). p.155.

$$
\begin{aligned}
UCL &= \bar{\bar{x}} + 3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} + A_3\bar{s} \\
CL &= \bar{\bar{x}} \\
LCL &= \bar{\bar{x}} - 3\frac{\bar{s}}{c_4\sqrt{n}} = \bar{\bar{x}} - A_3\bar{s}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

dimana

$$c_4 = \left(\frac{2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}$$ [2]

S adalah rerata dari simpangan baku tiap subgrup atau sampel.

1.2 Desain Peta Kendali $\bar{x}$

Peta kendali $\bar{x}$ umumnya menggunakan faktor pengali sigma sebesar 3 dengan asumsi bila ada suatu distribusi data normal dan terkendali maka probabilitas data yang berada di dalam batas kendali adalah sebesar 0,9973. Sebagai gambaran, untuk peta kendali $\bar{x}$ dengan batasan 3σ, $\alpha = 0.0027$ merupakan probabilitas sebuah data jatuh di luar batas kendali padahal proses terkendali. Keadaan ini disebut ARL_0, dimana

$$
\begin{aligned}
ARL_0 &= \frac{1}{0{,}0027} \\
&= 370
\end{aligned}
$$

[2] Nilai C_4, A_3, B_3 dan B_4 dapat dilihat pada Appendix A-7 yang terdapat pada buku "Mitra, Amitrava. *Fundamentals of Quality Control and Improvement*. Auburn University, 1995." p.647.

Sehingga bila proses dalam kondisi terkendali maka dari rata-rata 370 sampel pasti ada sebuah data yang jatuh di luar batas kendali.

Bila terjadi pergeseran rerata, kinerja peta kendali juga dapat dilihat dari ARL-nya. Sebagai gambaran, bila terjadi pergeseran rerata dan dengan ukuran sampel tertentu maka diketahui $\alpha = 0{,}1$. Keadaan ini disebut ARL_1 dimana

$$ARL_1 = \frac{1}{0{,}1}$$

$$= 10$$

Sehingga bila dari rata-rata 10 sampel pasti terdapat sebuah data yang keluar dari batasan maka ini cukup untuk menyatakan bahwa proses tersebut terjadi pergeseran rerata.

Demikian dengan menentukan nilai α maka akan didapatkan nilai faktor pengali sigmanya sehingga batas kendali pun dapat dibangun. Nilai α yang semakin besar dapat mempersempit/memperketat batas kendali.

2. PETA KENDALI S

2.1 Definisi

Suatu proses pasti mempunyai variabilitas dan kadang juga mengalami pergeseran baik pergeseran rerata ataupun mengalami pergeseran simpangan baku.

Pada umumnya, peta R lebih sering digunakan untuk mengendalikan variabilitas dari proses. Dari segi kemudahan peta R memang lebih mudah dan cukup untuk menjelaskan variabilitas proses. Tetapi peta R tidak cukup peka dalam menyidik/mendeteksi pergeseran yang relatif kecil. Untuk mendeteksi suatu pergeseran proses yang relatif kecil maka diperlukan ukuran sampel yang cukup besar. Apabila ukuran sampel n cukup besar, katakan n > 10 atau 12, peta R kehilangan efisiensi statistiknya dalam menaksir simpangan baku[3].

Gambaran dari pernyataan kehilangan efisiensi statistik misalnya dari sebuah proses mempunyai rerata acuan sebesar 10. Proses tersebut pasti mempunyai variabilitas. Kemudian dilakukan sampling untuk melihat akurasi dan variasi dari proses. Bila ukuran sampel tersebut kecil (n = 2) maka dengan metode Rentang (R) simpangannya adalah rentang/selisih dari 2 nilai tersebut. Bila ukuran sampelnya besar (n = 12) maka rentangnya adalah selisih dari nilai terendah dengan nilai tertinggi tanpa memperhatikan nilai yang lain. Berbeda dengan metode standar baku (S) yang selalu menjadikan rerata acuan sebagai acuan untuk menghitung tiap nilai[4]

2.2 Desain peta kendali S

---

[3] Montgomery, D.C. *Introduction to Statistical Quality Control*. (United States of America: John Wiley & Sons, 1985). p.212.

4 William A.L. and Frank Tumbelty. *SPC Essentials and Productivity Improvement: A Manufacturing Approach*. (USA: Harris Corporation, 1997). p.101.

Peta kendali S biasanya dipasangkan dengan peta kendali $\bar{x}$ dalam pengaplikasiannya. Pada dasarnya konsep pendesainan peta kendali S sama dengan peta kendali $\bar{x}$. Dalam pengaplikasiannya peta kendali S didesain lebih dahulu daripada peta kendali $\bar{x}$. Tujuannya agar variabilitas proses dikendalikan lebih dahulu lalu kemudian akurasi proses yang dikendalikan sekanjutnya. Sebuah proses tidak dapat dikatakan stabil bila variabilitasnya masih cukup besar.

Seperti peta kendali $\bar{x}$, peta kendali S juga memiliki batas kendali. Jika σ^2 variansi distribusi probabilitas tidak diketahui maka σ^2 adalah variansi sampel.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \qquad (2.1)$$

Jika distribusinya diasumsikan normal maka S merupakan perkiraan nilai dari $c_4\sigma$, dimana c_4 adalah suatu konstanta yang nilainya bergantung pada ukuran sampel n. Selanjutnya simpangan baku S adalah $\sigma\sqrt{(1-c_4^2)}$.

Bila nilai baku untuk σ diberikan maka batas kendali 3 sigma (σ) bagi S adalah

$$\begin{aligned} UCL_s &= c_4\sigma + 3\sigma\sqrt{(1-c_4^2)} \\ CL_s &= c_4\sigma \\ LCL_s &= c_4\sigma - 3\sigma\sqrt{(1-c_4^2)} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Bila nilai baku untuk σ tidak diberikan, maka ini harus ditaksir dengan menganalisa data yang lalu. Andaikan tersedia g sampel pendahuluan, masing-masing berukuran n dan S_i adalah simpangan baku sampel ke-i. Rata-rata g simpangan baku itu adalah

$$\overline{S} = \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{g} S_i \tag{2.3}$$

Dengan demikian batas kendali untuk peta kendali S menjadi

$$\begin{aligned} UCL_s &= \overline{S} + 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{(1-c_4^2)} = B_4\overline{S} \\ CL_s &= \overline{S} \\ LCL_s &= \overline{S} - 3\frac{\overline{S}}{c_4}\sqrt{(1-c_4^2)} = B_3\overline{S} \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. PETA KENDALI $\overline{X}$ TUNGGAL

3.1 Definisi

Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa peta kendali digunakan untuk mempertahankan sebuah proses dalam target dengan memperhatikan *centring* (pemusatan) dan distribusi proses yang normal. Jika rata-rata (μ_0) dan simpangan bakunya (σ_0) dari proses yang terkontrol diketahui, maka batas atas dan batas bawah untuk peta kendali $\overline{x}$ adalah:

$$UCL_x = \mu_0 + 3\sigma_0 / \sqrt{n} \tag{3.1}$$

$$LCL_x = \mu_0 - 3\sigma_0 / \sqrt{n}$$

Batas atas dan bawah untuk peta kendali S adalah:

$$UCL_s = c_4\sigma_0 + 3\sigma_0 \sqrt{(1 - c_4^2)} \quad (3.2)$$

$$LCL_s = c_4\sigma_0 - 3\sigma_0 \sqrt{(1 - c_4^2)}$$

dimana nilai c_4, dari nilai tabel,ditentukan oleh ukuran sampel (n).

Probabilitas $p_{\bar{x}}$ dimana rata-rata sampel berada di luar batas kontrol dari peta kendali $\bar{x}$ adalah:

$$p_{\bar{x}}(\mu,\sigma) = \int_{-\infty}^{LCL_{\bar{x}}} f_{\bar{x}}(\bar{x} \mid \mu,\sigma)d\bar{x} + \int_{UCL_{\bar{x}}}^{+\infty} f_{\bar{x}}(\bar{x} \mid \mu,\sigma)d\bar{x}$$

dimana (3.3)

$$f_{\bar{x}}(\bar{x} \mid \mu,\sigma) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$f_{\bar{x}}$ adalah fungsi kepadatan dari rata-rata sampel. Ketika proses terdistribusi normal dengan rata-rata = μ dan simpangan baku = σ, $f_{\bar{x}}$ juga normal dengan rata-rata = μ dan simpangan baku = $\sigma/\sqrt{n}$. Untuk proses yang terdistribusi normal, $p_{\bar{x}}$ dapat ditentukan dengan menggunakan fungsi probabilitas kumulatif dari distribusi normal baku.

Probabilitas p_s dimana simpangan baku sampel berada di luar batas kontrol dari peta kendali S adalah:

$$p_s(\sigma) = \int_{-\infty}^{LCL_s} f_s(s \mid \sigma)ds + \int_{UCL_s}^{+\infty} f_s(s \mid \sigma)ds$$

dimana (3.4)

$$f_s(s\mid\sigma) = \frac{(n-1)s}{2^{\frac{n-3}{2}}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sigma^2}\left[\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}\right]^{\frac{n-3}{2}}\exp\left[-\frac{s^2(n-1)}{2\sigma^2}\right]$$

f_s adalah fungsi kepadatan dari simpangan baku sampel.

Probabilitas P_{joint} dimana peta $\bar{x}$ atau peta S mendeteksi sampel di luar kontrol adalah kesatuan dari p_x dan p_s :

$$P_{joint}(\mu,\sigma) = p_x + p_s - p_x\, p_s \tag{3.5}$$

P_{joint} menandai efek penggabungan dari 2 peta kontrol dengan konsep keandalan pada sistem paralel.

Ketidakandalan dalam suatu sistem paralel diberikan sebagai berikut:

$Q_p = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$,

dan keandalannya adalah

$R_p = 1 - Q_p = 1 - (Q_1 Q_2 \ldots Q_n)$

atau

$$R_p = 1 - \prod_{i=1}^{n} Q_i = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - R_i)$$

Ini sama seperti nilai $P_{joint}(\mu,\sigma)$ yang didapatkan dari:

$$\begin{aligned} P_{joint} &= 1 - ((1 - p_x)(1 - p_s)) \\ &= 1 - (1 - p_x - p_s + p_x p_s) \\ &= p_x + p_s - p_x\, p_s \end{aligned}$$

p_x, p_s dan P_{joint} mengindikasi keefektifan peta kendali dalam mendeteksi status di luar kendali. Jika proses berada di dalam kendali ($\mu = \mu_0$ dan $\sigma = \sigma_0$), maka p_x, p_s dan P_{joint} sama dengan kesalahan jenis I (α).

Dari persamaan (3.3), (3.4) dan (3.5) dirumuskan

$\alpha_{\bar{x}} = p_{\bar{x}}(\mu_0, \sigma_0)$

$\alpha_s = p_s(\sigma_0)$

$$\alpha_{joint} = \alpha_{\bar{x}} + \alpha_s - \alpha_{\bar{x}}\,\alpha_s \tag{3.6}$$

dimana $\alpha_{\bar{x}}$ dan α_s adalah kesalahan jenis I yang terjadi pada peta kendali $\bar{x}$ dan S.

Karena $\alpha_{\bar{x}}$ dan α_s sangat kecil, maka α_{joint} dapat disederhanakan:

$$\alpha_{joint} = \alpha_{\bar{x}} + \alpha_s \tag{3.7}$$

Batas kendali yang lebih ketat menghasilkan P_{joint} dan α_{joint} yang lebih besar secara simultan. Dalam hal ini diharapkan terjadi peningkatan efektifitas dalam mendeteksi tetapi tidak meningkatkan kesalahan jenis I.

Dari persamaan (3.3), (3.4) dan (3.5) ditemukan bahwa saat $p_{\bar{x}}$ dipengaruhi oleh μ dan σ, p_s hanya dipengaruhi oleh σ.

Contohnya:

Diketahui sebuah distribusi proses yang tersebar secara normal, $\mu_0 = 10$ dan $\sigma_0 = 2$. Pemakaian ukuran sampel sebesar 5 menghasilkan batas kendali untuk peta kendali *joint* sebagai berikut:

$LCL_{\bar{x}} = 7{,}32$ $\quad UCL_{\bar{x}} = 12{,}68$

$LCL_s = 0$ $\quad UCL_s = 3{,}93$

Nilai ini didapatkan dari rumus batas kendali peta kendali $\bar{x}$ dan S.

Besar nilai α_{single} disamadengankan α_{joint} yaitu sebesar 0,0061. Nilai ini didapatkan dari $\alpha_{\bar{x}} = 0{,}0027$ yang ditambahkan dengan $\alpha_s = 0{,}0034$.

Dari nilai α sebesar 0,0061 ini didapatkan batas kendali untuk peta $\bar{x}$ tunggal, yaitu:

$$0{,}0061 = \mathrm{P}\left(Z \le \frac{LCL_{single} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) + (1 - \mathrm{P}\left(Z \ge \frac{UCL_{single} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right))$$

$$0{,}0061 = 0{,}0031 + 0{,}0031$$

$$0{,}0061 = \mathrm{P}(Z \le -2{,}74) - \mathrm{P}(Z \ge 2{,}74)$$

$$\frac{LCL_{single} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = -2{,}74 \qquad \frac{UCL_{single} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} = 2{,}74$$

$$\frac{LCL_{single} - 10}{2 / \sqrt{5}} = -2{,}74 \qquad \frac{UCL_{single} - 10}{2 / \sqrt{5}} = 2{,}74$$

$LCL_{single} = 7{,}55$ $\qquad$ $UCL_{single} = 12{,}45$

Demikian peta kendali $\bar{x}$ tunggal sebenarnya adalah peta kendali $\bar{x}$ dengan batas kendali yang lebih sempit/ketat dimana nilai α-nya sama dengan peta kendali $\bar{x}$ -S.

3.2 Sensitifitas peta kendali $\bar{x}$ tunggal

Sebenarnya peta kendali $\bar{x}$ dapat mendeteksi pergeseran rerata dan simpangan baku, sementara peta kendali S hanya dapat mendeteksi pergeseran simpangan baku. Sehingga ada kemungkinan kombinasi peta kendali $\bar{x}$ dan S dapat digantikan dengan peta kendali $\bar{x}$ tunggal. Tapi tidak semua proses dapat dikendalikan hanya menggunakan peta kendali $\bar{x}$. Untuk itu ditentukan dari rasio perbandingan nilai *detecting effectiveness* ataupun nilai ARL_1 nya.