



BAB III

METODE CUSENS & PAMA

3.1. Pendahuluan.

Pemakaian "metode distribusi koefisien", yang berdasarkan pada persamaan Huber, dipelopori oleh Guyon (1946). Pada saat itu Guyon mengabaikan pengaruh puntir, yaitu menganggap total torsional rigidity $2H = 0$, sehingga persamaan Huber menjadi

$$D_x \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_y \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = P.$$

Kemudian Massonet (1950) lebih memperluas metode tersebut dengan memasukkan pengaruh puntir kedalam persamaan Huber, dimana Massonet menganggap $2H = D_{xy} + D_{yx}$. Metode Guyon dan Massonet ini di Indonesia dikenal dengan istilah "Balok Rooster"

Perkembangan berikutnya dilakukan oleh Morice, Little dan Rowe (1956) dengan menyajikan grafik-grafik koefisien distribusi ("Design Curves") dan juga menganggap $2H = D_{xy} + D_{yx}$. Rowe (1962) memberikan grafik koefisien distribusi untuk momen transversal (μ) dari metode Massonet, yaitu : $M_y = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b H_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$. Disini Rowe umumnya mengambil 3 term ($n = 1, 2, 3$) dan jarang sampai 5 term ($n = 1, 2, 3, 4, 5$) untuk penentuan grafik koefisien distribusi momen transversal tersebut diatas.

Sedang untuk penentuan grafik koefisien distribusi momen longitudinal, hanya diambil 1 term saja ($n = 1$). Baik Massonet maupun Morice, Little & Rowe mengambil parameter puntir α

$$= \frac{D_{xy} + D_{yx}}{2 D_x D_y} \text{ berkisar antara } 0 \text{ dan } 1$$

Selanjutnya Cusens & Pama (1975) lebih menyempurnakan metode-metode tersebut diatas dan membuat perhitungan menjadi



lebih praktis untuk perencanaan. Penyempurnaan tersebut di-
 antaranya meliputi pengambilan term yang lebih banyak baik pa-
 da koefisien distribusi momen transversal maupun momen longi-
 tudinal, pengubahan bentuk momen transversal, memasukkan
 pengaruh "Coupling rigidities" D_1 dan D_2 kedalam parameter
 puntir $\alpha = \frac{D_{xy} + D_{yx} + D_1 + D_2}{2 \sqrt{D_x \cdot D_y}}$ dan pengambilan α berkisar an-
 tara 0 dan 2.

3.2. Anggapan struktur ortotropis.

Anggapan metode ini adalah plat deck, balok-balok trans-
 versal dan balok-balok longitudinal dipandang secara keseluruh-
 an sebagai struktur plat ortotropis yang terletak pada dua per-
 letakan simply supported.

3.3. Penyelesaian persamaan Huber.

Penyelesaian persamaan (2.7) adalah :

$$W = W_p + W_h \dots\dots\dots (3.1)$$

dimana :

W_p = penyelesaian partikular

W_h = " homogen dari persamaan :

$$D_x \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 H \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0$$

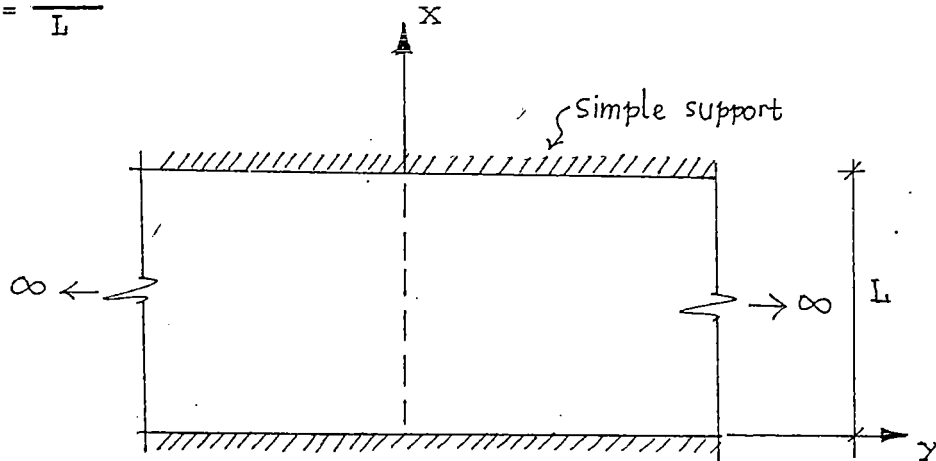
Untuk mendapatkan penyelesaian partikular W_p , dipakai tipe
 penyelesaian Levy - Nadai dengan pertama-tama memandang lebar
 jembatan tak berhingga. Beban yang bekerja pada jembatan di
 substitusi menjadi beban sinus yang dinyatakan dalam deret

Fourier sepanjang sumbu x :

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cdot \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.2)$$

dimana :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}$$



Gambar 3.1 Jembatan dengan lebar tak berhingga.

Bentuk umum penyelesaian partikular tersebut dapat dinyatakan sebagai :

$$W_p = \sum_{n=1}^{\infty} A \cdot e^{\phi_n \cdot y} \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.3)$$

dimana persamaan (3.3) tersebut memenuhi boundary condition pada $x = 0$ dan $x = L$.

Untuk mencari bentuk sebenarnya penyelesaian partikular maka persamaan (3.3) disubstitusikan kedalam persamaan homogen dari persamaan (2.7) :

$$D_y \cdot \phi_n^4 - 2H \cdot \alpha_n^2 \cdot \phi_n^2 + D_x \alpha_n^4 = 0 \dots\dots\dots (3.4)$$

Akar dari persamaan (3.4) adalah :

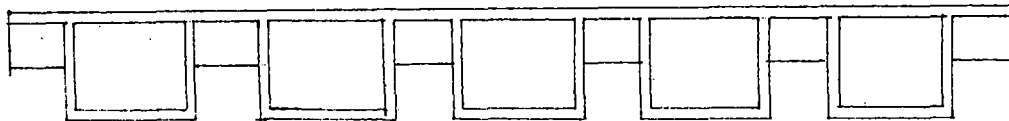
$$\phi_{n1,2,3,4} = \pm \alpha_n \sqrt{\frac{H}{D_y} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{D_y}\right)^2 - \left(\frac{D_x}{D_y}\right)}} \dots\dots\dots (3.5)$$

Ada 2 kemungkinan dari $\phi_{n1,2,3,4}$ tersebut :

- a. $\phi_{n1,2,3,4}$ = riil (nyata), bilamana : $H^2 > D_x D_y$
 $H = D_x = D_y$
- b. $\phi_{n1,2,3,4}$ = imaginair, bilamana : $H^2 < D_x D_y$

Selanjutnya akan dibahas setiap kemungkinan tersebut.

- 3.4. Bila $H^2 > D_x D_y$, yang secara fisik menunjukkan torsionally stiff dan atau flexurally soft deck (Gambar 3.2.).



Gambar 3.2. Deck dengan closed rib.

Dalam keadaan ini $r_{1,2} = \sqrt{\frac{H}{D_y} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{D_y}\right)^2 - \left(\frac{D_x}{D_y}\right)}}$ selalu positif.

ϕ_n yang positif tidak digunakan karena defleksi pada potongan yang jauh dari beban akan bertambah kecil.

Sehingga persamaan defleksi yang sebagai penyelesaian partikular dapat ditulis :

$$W_p = \sum_{n=1}^{\infty} (A \cdot e^{-\alpha_n r_1 \cdot y} + B \cdot e^{-\alpha_n r_2 \cdot y}) \sin \alpha_n x \quad (3.6)$$

Konstanta integrasi A dan B diperoleh dari boundary condition dalam keadaan ada beban sinus, sehingga didapat :

$$W_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \cdot \sin \alpha_n x}{2\alpha_n^3 D_y (r_1^2 - r_2^2)} \left[\frac{e^{-\alpha_n r_2 \cdot y}}{r_2} - \frac{e^{-\alpha_n r_1 \cdot y}}{r_1} \right] \quad (3.7)$$

Penyelesaian homogen W_h dapat ditulis :

$$W_h = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n r_1 y + B_n \cosh \alpha_n r_2 y + C_n \sinh \alpha_n r_1 y + D_n \sinh \alpha_n r_2 y) \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.8)$$

dimana persamaan (3.8) tersebut memenuhi boundary condition pada $x = 0$ & $x = L$ dan persamaan homogen :

$$D_x \cdot \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0$$

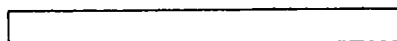
Penyelesaian totalnya adalah :

$$W = W_p + W_h$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin \alpha_n x}{2 D_y \alpha_n^3 (r_1^2 - r_2^2)} \left[\frac{e^{-\alpha_n r_2 y}}{r_2} - \frac{e^{-\alpha_n r_1 y}}{r_1} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n r_1 y + B_n \cosh \alpha_n r_2 y + C_n \sinh \alpha_n r_1 y + D_n \sinh \alpha_n r_2 y) \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.9)$$

Karena lebar jembatan sebenarnya mempunyai nilai tertentu yaitu selebar $2b$, maka untuk mengoreksi anggapan mula-mula bahwa lebar jembatan tak terhingga, dipakai boundary condition pada $y = \pm b$ untuk memperoleh konstanta integrasi A_n, B_n, C_n & D_n dari persamaan (3.9).

3.5. Bila $H = D_x = D_y$, yang secara phisik menunjukkan sifat isotropis (Gambar 3.3).



Gambar 3.3. Plat isotropis

Disini $r_{1,2} = 1$

Analog dengan 3.4 yaitu mengabaikan α_n yang positif, diperoleh:

$$W_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin \alpha_n x}{4 D_x \alpha_n^3} (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} \dots\dots\dots (3.10)$$

Penyelesaian homogen dapat ditulis :

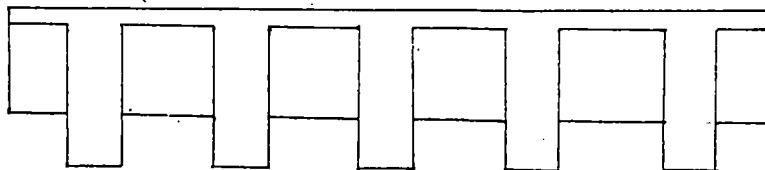
$$W_h = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \alpha_n y + B_n \cosh \alpha_n y + C_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.11)$$

Penyelesaian totalnya :

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin n x}{4 D_x \alpha_n^3} (1 + \alpha_n y) e^{-\alpha_n y} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh \alpha_n y + B_n \cosh \alpha_n y + C_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y + D_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y) \sin \alpha_n x \dots\dots\dots (3.12)$$

Konstanta-konstanta integrasi diperoleh dari boundary condition pada $y = \pm b$

3.6. Bila $H^2 < D_x D_y$, yang secara phisik menunjukkan torsionally soft dan atau flexurally stiff deck (Gambar 3.4)



Gambar 3.4. Deck dengan open rib



Dalam keadaan ini harga $\sqrt{\frac{H}{D_y} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{D_y}\right)^2 + \left(\frac{D_x}{D_y}\right)^2}}$ adalah bilangan imaginair, dengan menggunakan transformasi akan ϕ_n dapat ditulis :

$$\phi_{n1,2,3,4} = \pm \alpha_n \left[\sqrt{\frac{\sqrt{D_x/D_y} + H/D_y}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{D_x/D_y} - H/D_y}{2}} \right] \quad (3.13)$$

Dengan notasi : $r_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{D_x/D_y} + H/D_y}{2}}$

$$r_4 = \sqrt{\frac{\sqrt{D_x/D_y} - H/D_y}{2}}$$

Analog dengan 3.4 yaitu mengabaikan ϕ_n yang positif, diperoleh

$$W_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin \alpha_n x}{4 D_y \alpha_n^3 (r_3^2 + r_4^2)} \left[\frac{1}{r_3} \cos \alpha_n r_4 y + \frac{1}{r_4} \sin \alpha_n r_4 y \right] e^{-\alpha_n r_3 y} \quad (3.14)$$

Penyelesaian homogen dapat ditulis :

$$W_h = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n r_3 \cdot \cos \alpha_n r_4 y + B_n \cosh \alpha_n r_3 y \cdot \sin \alpha_n r_4 y + C_n \sinh \alpha_n r_3 y \cdot \cos \alpha_n r_4 y + D_n \sinh \alpha_n r_3 y \cdot \sin \alpha_n r_4 y) \sin \alpha_n x \dots \dots \dots (3.15)$$

Penyelesaian totalnya :



$$\begin{aligned}
 W = & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin \alpha_n x}{D_y \alpha_n^3 (r_3^2 + r_4^2)} \left[\frac{1}{r_3} \cos \alpha_n r_4 y + \frac{1}{r_4} \sin \alpha_n r_4 y \right] \times \\
 & e^{-\alpha_n r_3 y} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh \alpha_n r_3 y \cdot \cos \alpha_n r_4 y + B_n \cosh \alpha_n r_3 y \cdot \sin \alpha_n r_4 y \\
 & + C_n \sinh \alpha_n r_3 y \cdot \cos \alpha_n r_4 y + D_n \sinh \alpha_n r_3 y \cdot \sin \alpha_n r_4 y) \\
 & \sin \alpha_n x \dots \dots \dots (3.16)
 \end{aligned}$$

3.7. Bentuk umum penyelesaian persamaan Huber.

Bentuk persamaan defleksi dari tiga keadaan yang berbeda-beda tersebut diatas (3.4, 3.5 dan 3.6) dapat dinyatakan dalam suatu bentuk umum, yaitu :

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n \sin \alpha_n x}{\alpha_n^4 D_x 2b} K_1 \dots \dots \dots (3.17)$$

dimana :

K_1 = koefisien distribusi, yang nilainya berbeda-beda untuk masing-masing keadaan.

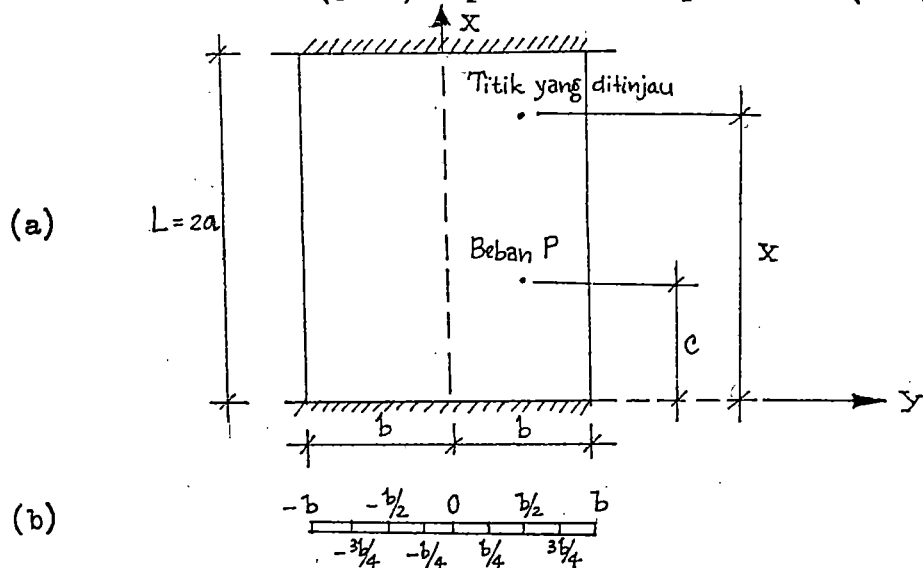
Dari turunan persamaan (3.17) dapat ditentukan gaya lintang dan momen.

3.8. Langkah-langkah perhitungan untuk mendapatkan koefisien distribusi.

Pada jembatan dengan perletakan bebas (Gambar 3.5) akibat suatu beban terpusat P pada jarak c dari perletakan akan terjadi lendutan pada suatu titik dengan jarak x dari perletakan :

$$W = \frac{P L^3}{\pi^4 b D_x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot K_1 \dots\dots\dots (3.18)$$

Persamaan lendutan (3.18) diperoleh dari persamaan (3.17)



Gambar 3.5. (a) Jembatan dengan perletakan bebas

(b) Standar titik yang ditinjau (reference station)

Momen longitudinal M_x dapat diperoleh dari turunan persamaan (3.17)

$$\text{yaitu : } M_x = \frac{P L}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} K_1 \dots\dots\dots (3.19)$$

$M_x = \text{maximum}$, jika $\frac{c}{L} = \frac{x}{L} = 0,5$, maka persamaan (3.19)

menjadi :

$$M_{x \text{ max}} = \frac{PL}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} K_1 \dots\dots\dots (3.20)$$

Cusens dan Pama-mengambil 9 term dari deret Fourier untuk memperoleh hasil yang teliti, sehingga :



$$M_{x \text{ max}} = \frac{PL}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} K_1' \dots\dots\dots (3.21)$$

Momen longitudinal maximum rata-rata pada tengah-tengah bentang
($x = 0,5 L$) :

$$M_{x \text{ max.rata-rata}} = \frac{PL}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \dots\dots\dots (3.22)$$

maka koefisien distribusi arah x :

$$K_{mx} = \frac{M_{x \text{ max}}}{M_{x \text{ max.rata-rata}}} = \frac{\sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cdot K_1'}{\sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2}} \dots\dots\dots (3.23)$$

Momen transversal M_y juga dapat diperoleh dari turunan persamaan
(3.17) yaitu :

$$M_y = \frac{PL}{\pi^2 b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} K_2' \dots\dots\dots (3.24)$$

Dengan oara yang sama seperti mendapatkan K_{mx} , maka koefisien
distribusi arah y :

$$K_{my} = \frac{\sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \cdot K_2'}{\sum_{n=1}^9 \frac{1}{n^2} \sin^2 \frac{n\pi}{2}} \dots\dots\dots (3.25)$$

Jadi : - momen longitudinal $M_x = K_{mx} \times M_x \text{ rata-rata} \dots\dots\dots (3.26)$

- momen transversal $M_y = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \times K_{my} \times M_x \text{ rata-rata} \dots\dots\dots (3.27)$

Besarnya koefisien distribusi K_{mx} dan K_{my} tergantung pada :

- parameter lentur $\theta = \frac{b}{L} \sqrt{\frac{D_x}{D_y}}$

- " puntir $\alpha = \frac{2H}{2\sqrt{D_x D_y}}$

- letak/posisi beban

- titik yang ditinjau (reference station)

Koefisien distribusi K_{mx} dan K_{my} disusun dan diplot dalam grafik-

grafik dengan parameter puntir $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ dan $\alpha = 2$

Grafik-grafik tersebut terdapat [3], halaman 112-132.

3.9. Elastic rigidities.

Cusens & Pama telah mengumpulkan dan menyusun elastic rigidities dalam [3], halaman 54-83, diantaranya meliputi :

- Plat isotropis

- Grillages

- Balok T

- Multi-beam bridge decks

- Multi-cell box-beam bridges

- Plat yang dikakukan dengan rib yang berbentuk kotak.